

CIÊNCIA HOJE

REVISTA DE DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA DA SOCIEDADE BRASILEIRA PARA O PROGRESSO DA CIÊNCIA VOL. 14 Nº 80 MARÇO/ABRIL DE 1992 C/5 R.000,00

C
A
O
S





TRAVELERS CHEQUE

BANCO DO BRASIL.

COM ELE, O MUNDO

FALA A SUA LÍNGUA.

O Banco do Brasil sai na frente e lança o primeiro Travelers Cheque emitido no País. É também o primeiro Banco brasileiro a se utilizar do moderno sistema de Travelers Cheque pré-empacotado, pelo qual o cliente escolhe as composições que deseja em cheques de 50, 100 ou 500 dólares, o que agiliza e desburocratiza o atendimento.

Agora você vai poder viajar para o exterior com a segurança que o Banco do Brasil sempre ofereceu a você, e com o nome Visa International, um dos líderes mundiais em sistemas de pagamento.

Com o Travelers Cheque Banco do Brasil você paga hotéis, restaurantes, lojas, e ainda conta com 200 mil pontos de reembolso em mais de 170 países. Além disso, o Travelers Cheque Banco do Brasil não utilizado pode ser guardado, porque nunca perde o prazo de validade. Ou então pode ser utilizado para pagar suas compras efetuadas no exterior com o Cartão OuroCard International.

Mas isso não quer dizer que para adquirir os cheques

de viagem do Banco do Brasil você precisa ser cliente do OuroCard International. É apenas uma vantagem a mais para quem possui os dois produtos.

No caso de perda ou roubo do Travelers Cheque, tudo que você tem a fazer é uma chamada telefônica a cobrar para o Centro de Reembolso Visa, que funciona 24 horas por dia, 365 dias por ano, e será rapidamente reembolsado. Caso você seja cliente também do OuroCard International e seu cartão tiver sido extraviado junto com os cheques, poderá solicitar o cancelamento simultaneamente, através do mesmo telefone.

Se você pretende passar as próximas férias fora do País, entre em contato com a sua agência do Banco do Brasil, ou utilize a Dis-cagem Direta Gratuita das Centrais OuroCard.

Você terá todas as informações que precisa sobre a maneira mais segura de levar dinheiro em viagem.

Travelers Cheque Banco do Brasil. Tradição e segurança do Banco do Brasil conquistando o mundo.

**TRAVELERS
CHEQUE
BANCO DO BRASIL**





Marte

No n.º 79 de *Ciência Hoje*, foi publicado um artigo de minha autoria e de meus colegas Walter D. Gonzalez, Iara R.C.A. Pinto e Odím Mendes Jr. sobre o campo magnético dos planetas do sistema solar. Naquela ocasião afirmávamos que “não existe um consenso quanto à existência de campo magnético em Marte”, embora também salientássemos que “dados preliminares coletados pela sonda *Phobos-2* parecem indicar a existência de um fraco campo magnético”.

Enquanto nosso artigo era preparado para publicação, a revista especializada *Planetary and Space Science* (vol. 39, p. 1.493, 1991) publicou um artigo de Dolginov e Zhuzgov contendo os resultados da análise dos dados magnéticos coletados pela sonda *Phobos-2* em fevereiro de 1989. Estes resultados comprovam de forma definitiva a existência de um campo magnético intrínseco em Marte. Este campo apresenta uma estrutura dipolar com um momento magnético de $1,2 \cdot 10^{21}$ gauss.cm³, uma polaridade coincidente com a Terra (isto é, o pólo norte magnético está no hemisfério Sul) e uma configuração praticamente centrada com respeito ao centro geomagnético do planeta, com uma inclinação de aproximadamente 12° em relação ao seu eixo de rotação. Tais características são contrárias àquelas anteriormente publicadas por Orgzall e Franck na revista *Earth, Moon and Planets* (vol. 48, p. 183, 1990), também com base em dados obtidos pela sonda *Phobos-2*, e confirmam de um modo geral os resultados fornecidos pelas sondas *Mars-2*, *Mars-3* e *Mars-5* na década de 1970.

A confirmação das características acima com relação ao campo magnético de Marte permite-nos obter uma visão geral dos campos magnéticos dos

planetas no sistema solar, na qual os planetas internos possuem campos relativamente fracos e intimamente relacionados à rotação do planeta, enquanto os planetas externos, à exceção de Plutão, possuem campos intensos e configuração similar aos planetas internos (Júpiter e Saturno) ou distinta (Urano e Netuno). Resta-nos saber se tal visão mantém-se em outros sistemas estelares.

OSMAR PINTO JÚNIOR

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS,
SÃO JOSÉ DOS CAMPOS (SP)

Alfinetes artesanais

Ao ler *Ciência Hoje* n.º 77, deparei-me com uma cartinha de um jovem estudante, Cleber Pinho da Silva, de São Paulo, que solicitava informações sobre alfinetes entomológicos, visto que é colecionador amador de insetos. As dificuldades em adquirir tais alfinetes são numerosas e onerosas, como bem informa esta revista. Mas nem tudo está perdido: tenho uma boa notícia para o aspirante a professor universitário. Aqui, em nosso Laboratório de Entomologia da Universidade Federal de Alagoas, estamos substituindo os aludidos alfinetes entomológicos (importados) pelos espinhos de uma cactácea, o mandacaru (*Cereus jamacaru*), planta esta muito comum e facilmente encontrada em regiões áridas. Já apresentei esta minha descoberta e recebi os maiores elogios por parte da comunidade científica durante o VIII Congresso Brasileiro de Entomologia, realizado em Recife, no ano passado.

PROF. JOSÉ CORDEIRO DA SILVA

DEPARTAMENTO DE ZOOLOGIA, UFAL, MACEIÓ

Ararajuba

Por gentileza, envie-me o endereço ou informação para aquisição da *Revista Brasileira de Ornitologia*, comentada em *Ciência Hoje* n.º 71, na seção ‘É bom saber’. Desde já, agradeço.

PAULO MACHADO
SANTA MARIA (RS)

• *A assinatura de Ararajuba, Revista Brasileira de Ornitologia, pode ser solicitada à atual sede da Sociedade Brasileira de Ornitologia, cujo endereço é: UNISINOS (Museu de Zoologia), Caixa Postal 275, CEP 92020, São Leopoldo, Rio Grande do Sul. Como vê, bem perto de sua cidade. Por enquanto ela está sendo editada anualmente. O primeiro número foi aquele do qual falamos na revista, mas o segundo já está para sair, se é que ainda não está pronto. Em vista do interesse que está despertando, é possível que Ararajuba passe a sair semestralmente.*

Errata (I)

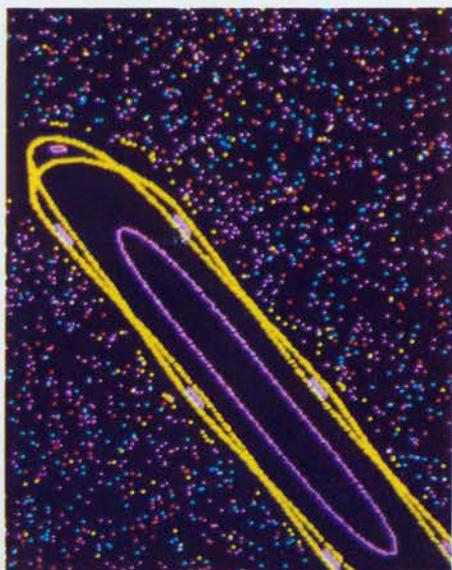
No artigo ‘Serpentes na selva de pedra’, de Ivan Sazima, Giuseppe Puorto e Iara Laporta-Ferreira, publicado na seção ‘É bom saber’, de *Ciência Hoje* n.º 76 (p. 66), os nomes científicos de quatro serpentes foram grafados incorretamente. Assim, no quadro sobre as espécies capturadas em São Paulo, onde se lê *Apostolepis assimilissem*, *Atractus reticulatussem*, *Liophis undulatussem* e *Tantilla melancocephala*, o correto é, respectivamente, *Apostolepis assimilis*, *Atractus reticulatus*, *Liophis undulatus* e *Tantilla melanocephala*.

Errata (II)

No artigo ‘O que está em jogo no caso Cytotec’, de Helena Lutécia Luna Coelho, também publicado em *Ciência Hoje* n.º 76 (p. 60), assinalamos as seguintes correções: o terceiro parágrafo faz parte do destaque em negrito; na linha 45, leia-se 16 comprimidos ao invés de seis; as informações originais foram publicadas no *The Lancet*, n.º 338, p. 56 e 247, 1991.



28



39

CARTAS

1

EDITORIAL

5

UM MUNDO DE CIÊNCIA

6

Há indicações de que no mundo atômico e subatômico o caos se manifesta de forma muito mais sutil do que nos sistemas macroscópicos. Por H. Moysés Nussenzveig.

Certas ligas magnéticas diluídas, denominadas vidros-de-*spin*, podem 'imitar' algumas funções do cérebro. Esses materiais são objeto de estudo de um novo ramo da ciência, a neurocomputação, que se ocupa da concepção de máquinas 'inteligentes'. Por Sergio Coutinho.

ARTIGOS

OS PRIMÓDIOS DO CAOS DETERMINÍSTICO

10

Ildeu de Castro Moreira

O estudo do caos trouxe novos e importantes elementos de reflexão sobre uma questão fundamental na história das ciências: o papel do acaso e do determinismo no comportamento da natureza. Por Ildeu de Castro Moreira.

O FRÁGIL EQUILÍBRIO DA VIDA

18

Robert M. May

Pioneiro na área, Robert May, da Universidade de Oxford, discute o comportamento caótico no crescimento populacional de espécies vegetais e animais.

A DANÇA DOS SPINS

28

Sergio M. Rezende

As experiências recentemente desenvolvidas na Universidade Federal de Pernambuco com bobinas de modulação de campo comprovam a eliminação do estado caótico. É possível controlar o caos!

A DESORDEM INEVITÁVEL

34

Antônio Sérgio Teixeira Pires e Bismarck Vaz da Costa

Cada vez mais, novos itens vêm sendo incorporados à lista de fenômenos que apresentam regimes caóticos. O aumento do número de indivíduos infectados por uma doença contagiosa é um deles.

O INFINITO EM CORES**40****Francisco Tamarit, Sergio Cannas, Thadeu J.P. Penna, Paulo Murilo C. Oliveira, Constantino Tsallis e Helio F.V. de Resende**

Uma das mais belas expressões do caos são os fractais, figuras multicoloridas produzidas nas telas do computador que associam arte e ciência.



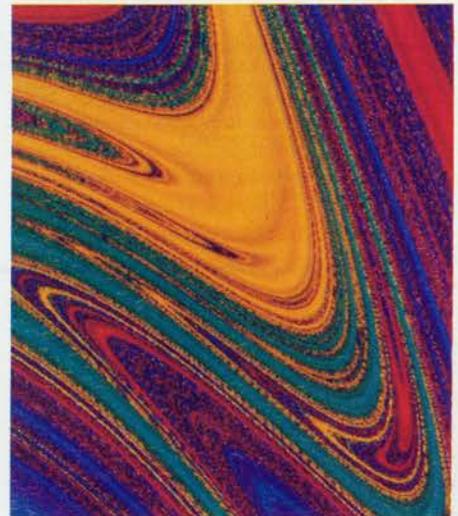
40

CAOS NA MECÂNICA QUÂNTICA?**48****Alfredo M. Ozorio de Almeida**

Antes de discutir a existência do caos na mecânica quântica, torna-se imprescindível a criação de um dicionário bilíngüe clássico/quântico: as propriedades que distinguem o movimento caótico do regular na mecânica clássica não têm correspondentes quânticos legítimos.

É BOM SABER**56**

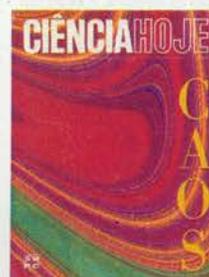
Como o conceito de caos pode ser transposto para outras áreas? Wanderley Guilherme dos Santos, Aloisio Pessoa de Araujo, Fayga Ostrower, Paul Singer, José Américo Motta Pessanha e Livio Tragtenberg discutem a questão.



56

RESENHA**61**

Já resenhado em quatro idiomas, o livro *Sistemas hamiltonianos: caos e quantização*, de Alfredo M. Ozorio de Almeida, é pela primeira vez comentado em português. Por Jair Koiller.

GLOSSÁRIO**62****FAÇA SEU PRÓPRIO CAOS****64**

CAPA Figura com estrutura fractal feita num computador e baseada no movimento de um pêndulo amortecido sob perturbação periódica. Foto cedida pelo Grupo de Caos da Universidade de Maryland (EUA).

Publicada mensalmente sob a responsabilidade da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência.

Secretaria: Av. Venâncio Brás, 71, fundos, casa 27, Rio de Janeiro, CEP 22290, tel.: (021) 295-4846. Fax: (021) 541-5342.

Editores: Darcy Fontoura de Almeida (Instituto de Biofísica/UF RJ), Ennio Candotti (Instituto de Física/UF RJ), Alberto Passos Guimarães Filho (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas/CNPq) e José Murilo de Carvalho (Instituto Universitário de Pesquisas/RJ); editor convidado, Ildeu de Castro Moreira (Instituto de Física/UF RJ).

Editor convidado: Ildeu de Castro Moreira (Instituto de Física/UF RJ).

Conselho Editorial: Alzira de Azevedo (Centro de Pesquisa e Documentação em História Contemporânea do Brasil/FGV), Ângelo Barbosa Machado (Instituto de Ciências Biológicas/UFMG), Carlos Morel (Fundação Oswaldo Cruz), José C. Maia (Instituto de Química/USP), Luiz Bevilacqua (COPPE/UF RJ), Otávio Velho (Museu Nacional/UF RJ), Reinaldo Guimarães (Sub-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa/UERJ), Roberto Lent (Instituto de Biofísica/UF RJ), Sonia de Campos Dietrich (Instituto de Botânica/SP).

Diretor: José Monserrat Filho.

Secretaria de Redação: Cilene Vieira (editora associada); Soraya Araújo (secretária); Maria Inez Duque Estrada (editora de texto); Regina Ferreira (coord. de revisão); Alcília Ivanishevich (coord. de jornalismo); Luísa Massarani (repórter); Micheline Nussenzeig (setor internacional).

Edição de Arte: Christiane Abbade, Claudia Fleury da R. Borges e Ana Claudia Ribeiro (programação visual); Selma Azevedo e Carlos Henrique V. dos Santos (desenho e arte-final).

Administração: Adalgisa M. S. Bahri (gerente interino), Neusa Maria de Oliveira Soares, Marcos de Alcantara Serrão, Neusa Luísa de S. Soares, Ailton Borges da Silva, Marly Onorato, Guilherme Frederico da Silva.

Assinatura, Circulação e Expedição: Adalgisa M. S. Bahri (gerente), Maria Lucia da G. Pereira, Moisés V. dos Santos, Luciene dos Santos Azevedo, Pedro Paulo de Souza, Daniel Vieira dos Santos, Delson Freitas, Ernesto Pontes Pereira, Jorge Noé Lopes Carmo, Márcia Cristina Gonçalves da Silva, Manoel Antonio Grozima Aguiar; tel.: (021) 270-0548.

Departamento Comercial: Alvaro Roberto S. Moraes (gerente); Irani F. Araújo (secretária).



A Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência foi fundada em São Paulo, em 1948. É uma entidade civil sem fins lucrativos nem cor política e religiosa, voltada para a promoção do desenvolvimento científico e tecnológico no país.

Desde sua fundação organiza e promove reuniões anuais, com a participação de cerca de 70 sociedades e associações científicas das diversas áreas do conhecimento, onde professores e estudantes discutem seus programas de pesquisa. Temas e problemas nacionais e regionais são debatidos com participação franqueada ao público em geral. Através de suas secretarias regionais promove simpósios, encontros e iniciativas de difusão científica ao longo de todo o ano. Mantém ainda quatro projetos nacionais de publicação; a revista *Ciência e Cultura* (1948-) e a revista *Ciência Hoje* (1982-), que se destinam a públicos diferenciados, o *Jornal da Ciência Hoje* (1986-) e a revista *Ciência Hoje das Crianças* (1990-).

Podem associar-se à SBPC cientistas e não-cientistas que manifestem interesse pela ciência; basta ser apresentado por um sócio ou secretário-regional e preencher o formulário apropriado. A filiação efetiva-se após a aprovação da diretoria, e dá direito a receber o *Jornal da Ciência Hoje* e a obter um preço especial para as assinaturas das revistas.

Sede nacional: Rua Costa Carvalho, 222 — CEP 0529. São Paulo, SP Caixa Postal 11008 — CEP 05499, São Paulo, SP. Tels.: (011) 211-0933, 211-5008. Telex: (11) 81681 SBCH. Fax: (011) 212-1376.

Regionais: AC - Depto. de Economia/UFAC, C. Postal 128, CEP 69900, Rio Branco, AC, tel.: (068) 226-1422, r. 134 (Reginaldo Fernando F. de Castela); AL - Depto. de Biologia/UFAL, Praça Afrânio Jorge s/nº, Prado, CEP 57010, Maceió, AL, tel.: (082) 223-5613, r. 08 (Fábio José C. Branco Costa); AM - Depto. de Ciências Agrônomicas/INPA, Alameda Cosme Ferreira, 1756, CEP 69083, Manaus, AM, tel.: (092) 236-9733 (Hiroshi Noda); BA - Instituto de Física/UFBA, Campus da Federação,

Colaboraram neste número: Maria Luíza X. de A. Borges (edição de texto); Norah Levy, Ailton Rodrigues de Oliveira, Leila Pimenta e Vilma Homero (revisão); Cássio Leite Vieira (jornalismo). Luiz Fernando P. Dias (análise de sistemas); Marta Rodrigues (arte-final).

Conselho Científico: Antônio Barros de Castro (Faculdade de Economia e Administração/UF RJ), Antônio Barros de Ulhoa Cintra (Hospital das Clínicas/USP), B. Boris Vargaftig (Instituto Pasteur/França), Carlos Chagas Filho (Instituto de Biofísica/UF RJ), Carlos M. Morel (Fundação Oswaldo Cruz), Carolina Bori (Instituto de Psicologia/USP), Crodovaldo Pavan (Instituto de Biologia/Unicamp), Dalmo Dallari (Faculdade de Direito/USP), Darcy Ribeiro (Instituto de Filosofia e Ciências Sociais/UF RJ), Elinaldo Carlini (Departamento de Psicobiologia/EMP), Fernando Gallebeck (Instituto de Química/Unicamp), Francisco Weffort (Faculdade de Filosofia/USP), Gilberto Velho (Museu Nacional/UF RJ), Herbert Schubart (Instituto Nacional de Pesquisas da Amazônia), Herman Lent (Departamento de Biologia/Universidade Santa Úrsula), João Steiner (Instituto de Pesquisas Espaciais), José Antônio Freitas Pacheco (Instituto Astronômico e Geofísico/USP), José Goldenberg (Instituto de Física/USP), José Reis (SBPC), José R. do Valle (Departamento de Farmacologia/EMP), José Lourenço (Instituto de Geociências/UFPA), Leopoldo Nachbin (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas/CNPq), Luis de Castro Martins (Laboratório Nacional de Computação Científica/CNPq), Maurício Mattos Peixoto (Academia Brasileira de Ciências), Miguel Covian (Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto/USP), H. Moyses Nussenzeig (Departamento de Física/PUC-RJ), Newton Freire-Maia (Departamento de Genética/UF RJ), Oscar Sala (Instituto de Física/USP), Oswaldo Porchat Pereira (Centro de Lógica/Unicamp), Otávio E. A. de Brito (Instituto de Geociências/UFMG), Pedro Malan (Departamento de Economia/PUC-RJ), Ricardo Ferreira (Departamento de Química Fundamental/UFPE), Sylvio Ferraz Mello (Instituto Astronômico e Geofísico/USP), Telmo S. Araújo (Departamento de Engenharia Elétrica/UFPP), Warwick E. Kerr (Univ. Fed. de Uberlândia/MG).

Sucursal Belo Horizonte: Ângelo B. Machado, Roberto Barros de Carvalho, Marise Muniz, Sílvia Godinho (estagiária) — Depto. de Zoologia, Instituto de Ciências Biológicas/UFMG, C. Postal 2486, CEP 31160, Belo Horizonte, MG, tel.: (031) 443-5346, fax (061) 224-7147

Sucursal Brasília: Margaret Marmorini, Rosemar Bertelli (secretária) e Ana Beatriz Magno (estagiária), ICC, Ala Sul, bloco A, sobrelaje sala 213, Campus Universitário, UnB, C.P. 04323, CEP 70919, Brasília, DF, tel.: (061) 273-4780; fax (061) 224-7147.

Sucursal Recife: Luiz Antonio Marcusch, Angela Weber — Av. Luis Freire s/nº, CCN, Área II, Cidade Universitária, CEP 50739, Recife, PE, tel.: (081) 271-2211, r. 2468/2469.

CEP 40210, Salvador, BA, tels.: 247-2714, 247-0646 (Dionarcos Soares de Vasconcelos); CE - Depto. de Ciências Sociais e Filosofia/UFCE, Av. da Universidade, 2762, Benfica, CEP 60020, Fortaleza, CE, tel.: (085) 243-8047 (Maria Sulamita de A. Vieira); DF - Depto. de Antropologia/UnB, Campus Universitário, CEP 70910, Brasília, DF, tel.: 273-3264 (Gustavo Lins Ribeiro); GO - Instituto de Ciências Biológicas/UFGO, Campus Universitário, CEP 74000, Goiânia, GO, tel.: (062) 205-1000, r. 152 (Joaquim Tomé de Sousa); MA - Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação/UFMA, Largo dos Amores, 66, CEP 65000, São Luís, MA, tels.: (098) 232-3370, 232-3807 (Othon de Carvalho Bastos); MG - Depto. de Física/UFMG, Av. Antonio Carlos, 6627, CEP 31270, Belo Horizonte, MG, tel.: (031) 441-9466, r. 219/225 (Márcio Quintão Moreno); VIÇOSA (seccional) - Depto. de Biologia Geral/UFV, CEP 36570, Viçosa, MG, tel.: (031) 899-2512 (Lucio Antonio O. Correa); MT - Depto. de Geologia/UFMT, Av. Fernando Correa s/nº, CEP 78000, Cuiabá, MT, tel.: (065) 315-8751 (José Domingues de Godoi Filho); MS - Depto. de Química/UFMS, Cidade Universitária, CEP 79100, Campo Grande, MS, tel.: (067) 387-3311, r. 346 (Dario Xavier Pires); PA - Depto. de Geofísica/UFPA, C. Postal 1611, CEP 66001, Belém, PA, tels.: (091) 229-5438 ou 229-1811, r. 26 (Jacira Felipe Beltrão); PB - Depto. de Física/UFPB, C. Postal 5008, CEP 58051, João Pessoa, PB, tel.: (083) 224-7200, r. 2435 (Mauro Kyotoko); PE - Depto. de Economia/UFPE, Av. Luis Freire s/nº, Área II, Cidade Universitária, CEP 50000, Recife, PE, tel.: (081) 271-2211, r. 6844 (Divaldo de Almeida Sampaio); PI - Depto. Biomédico/UFPI, Campus Universitário, CEP 64000, Teresina, PI, tels.: (086) 232-3913, 232-1729 (Manoel Chaves Filho); PR - Depto. de Biologia Geral/UE de Londrina, C. Postal 6001, CEP 86051, Londrina, PR, tel.: (0432) 27-5151, r. 247/477 (Ana Odete Santos Vieira); CURITIBA (seccional) - Depto. de Planejamento e Administração Escolar/UFPR, Rua Gal. Carneiro, 460, CEP 80001, Curitiba, PR, tels.: (041) 222-7870 ou 264-2522, r. 277/292 (Eivaldo Antonio M. Ferreira); MARINGÁ (seccional) - Depto. de Análises Clínicas/UE de Maringá, Av. Colombo, 3690, CEP 87020, Maringá, PR, tel.: (0442)

Sucursal São Paulo: José Carlos C. Maia, Vera Rita Costa, Carmen Lúcia Visconti Weingrill — Av. Professor Luciano Gualberto, 374, Prédio da Antiga Reitoria, Cidade Universitária, USP, CEP 05508, São Paulo, SP, tels.: (011) 814-6656 ou 813-3222, r. 2713.

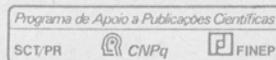
Correspondentes: Porto Alegre: Gilberto Carvalho Ferraz — Travessa Luiz Englert s/nº, prédio 20, sala 09, Campus Central/UFRS, CEP 90040, Porto Alegre, RS, tel.: (0512) 27-5529. Curitiba: Glaci Zancan — Dep. de Bioquímica, Universidade Federal do Paraná, Campus Universitário Jardim das Américas, CEP 81504, Curitiba, PR, tel.: (041) 266-3633 ramal 184. Maceió: Marize Primola Pedrosa — Departamento de Biologia, Centro de Ciências Biológicas, Universidade Federal de Alagoas, Praça Afrânio Jorge, s/n, CEP 57000, Maceió, AL, tel.: (082) 223-5613 ramal 082. Campina Grande: Mário de Souza Araújo Filho — Depto. de Engenharia Elétrica, Universidade Federal da Paraíba, Rua Nilda de Queiroz Neves, 130, CEP 58100, Campina Grande, PB, tel.: (083) 321-0005. Florianópolis: Thereza Cristina M. de Lima Nogueira — Coordenadora Especial de Farmacologia, CCB, Universidade Federal de Santa Catarina, Rua Ferreira Lima, 26, Centro, CEP 88015, Florianópolis, SC, tel.: (0482) 22-4164 e 31-9491.

Correspondente em Buenos Aires: Revista *Ciencia Hoy*, Corrientes 2835, Cuerpo A, 5º A, 1193, Capital Federal, tels.: (00541) 961-1824, 962-1330. Neste endereço pode-se adquirir *Ciência Hoy* (preço sujeito a confirmação). Na sede de *Ciência Hoy*, pode-se adquirir ou assinar *Ciencia Hoy* (preço sujeito a confirmação).

Assinaturas para o exterior (11 números): US\$ 100 (via aérea) e US\$ 50 (via superfície).

ISS-0101-8515. Distribuição em bancas: Fernando Chinaglia Distribuidora S.A., Rio de Janeiro (exclusiva em todo o território nacional). **Composição:** Renart Fotolito, Fotocomposição e Editora Ltda. **Fotolito:** Grafcolor Reproduções Gráficas Ltda. **Impressão:** Bloch Editores S.A.

Para sua publicação, Ciência Hoje conta com o apoio do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) e do Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC).



Publicidade: São Paulo: Bartolomeu Mastrochirico, tel.: (011) 263-2521, fax: (011) 62-6702; Rio de Janeiro: Alvaro Roberto S. Moraes, tel.: (021) 295-4846 fax: (021) 541-5342; Brasília: Deusa Ribeiro, tel.: (061) 321-5009.



26-2727, r. 215/313 (Rafael Campos Bezerra); RJ - Depto. de Engenharia Mecânica/PUC, Rua Marquês de São Vicente, 225, CEP 22453, Rio de Janeiro, RJ, tels.: (021) 259-5197, 529-9578 (Eloi Fernandez y Fernandez); RN - Depto. de Informática e Matemática Aplicada/UFRN, C. Postal 1527, CEP 58072, Natal, RN, tel.: (084) 231-1266, r. 257 (Pedro Fernandes Maia); RO - Depto. de Ciências Biomédicas/UFRO, CEP 78900, Porto Velho, RO (Elizabeth Antonia L. de M. Martinez); RS - Campus Central/URFGRS, Prédio 20, Sala 9A, Travessa Luiz Englert s/nº, CEP 90040, Porto Alegre, RS, tel.: (051) 227-5529 (Gilberto Carvalho Ferraz); **Pelotas** (seccional) - Depto. de Zoologia e Genética/UFPEL, Campus Universitário, CEP 96001, Pelotas, RS, tel.: (053) 221-2033 (Maria da Graça M. Roth); **Rio Grande** (seccional) - Depto. de Oceanografia, Universidade do Rio Grande, Caixa Postal 474, CEP 96200, Rio Grande, RS, tel.: (0532) 32-8711, r. 11 (Luiz Paulo Rodrigues Cunha); **Santa Maria** (seccional) - CPG Extensão Rural/UFMS, Campus Universitário, CEP 97100, Santa Maria, RS, tel.: (055) 226-1616, r. 235/2165 (Gustavo Martin Quesada); SC - Coordenadora Especial de Farmacologia/UFSC, Rua Ferreira Lima, 26, Centro, CEP 88015, Florianópolis, SC, tels.: 22-4164, 33-9491 (Thereza Cristina M. de L. Nogueira); SE - Depto. de Serviço Social/UFSE, Campus Universitário, CEP 49000, Aracaju, SE, tel.: 224-1331, r. 347 (Maria Helena S. Cruz); **SP** (subárea I) - Depto. Geografia, Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas/USP, C. Postal 8105, CEP 01051, São Paulo, SP, tel.: (011) 211-5008 ou 210-2122, r. 593 (José Pereira de Queiroz Neto); **SP** (subárea II) - Depto. de Genética/ESALQ, C. Postal 83, CEP 13400, Piracicaba, SP, tels.: (0194) 22-3087 ou 33-0011, r. 2251 (Aline Aparecida Pizzirani Kleiner); **SP** (subárea III, seccional Botucatu) - Depto. de Genética, Instituto de Biociências/UNESP, Campus Universitário, CEP 18610, Botucatu, SP, tel.: (0149) 22-0555, r. 229 (Romeu Cardoso Guimarães); **SP** (subárea III) - Depto. de Tecnologia, Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias/UNESP, Rodovia Carlos Tonani, km 05, CEP 14870, Jaboticabal, SP, tel.: (0163) 22-4000, r. 254/255 (Márcia Justino R. Mutton).

O CAOS E A CIÊNCIA

Não. Este editorial não se refere, ao contrário de vários outros, à situação 'caótica' da ciência no Brasil. Embora este tema, pela sua importância e pela gravidade da situação atual, mereça atenção permanente, estaremos nos referindo aqui a um sentido mais específico da palavra caos. Novas linhas de investigação científica, que podem vir a ter repercussões tecnológicas importantes, surgiram nas duas últimas décadas em áreas científicas em que a influência da matemática é maior. A partir de uma conjunção de fatores — entre os quais avanços matemáticos significativos, análises de modelos provenientes de vários domínios do conhecimento e desenvolvimento dos computadores —, descobriu-se que a maioria dos sistemas dinâmicos não segue um comportamento regular e previsível, mas tem comportamento altamente complexo, com características aleatórias. O nome que passou a ser usado para descrever esse tipo de situação é comportamento caótico, termo ligado ao sentido comum da palavra caos, associado com desordem, acaso e aleatório. A sensibilidade às condições iniciais, que impõe severas restrições a uma previsão muito precisa sobre o comportamento futuro, caracteriza esses sistemas. Todos temos experiência de situações pessoais ou sociais em que pequenos eventos podem mudar drasticamente a história futura. Os fatos da vida individual ou social, complicados e incertos, desafiam previsões rigorosas. Muitas credences e superstições, inclusive, medram à sombra das tentativas de contornar os acasos da vida e de atenuar a incerteza quanto ao que está por vir. A descoberta de que, mesmo em situações físicas envolvendo poucos objetos em interação, tal tipo de comportamento pode ocorrer mostrou novas limitações do paradigma newtoniano-laplaciano emanado da física. Já na década de 20 deste século, por outra via, o determinismo estrito havia sido colocado em xeque pelas idéias da mecânica quântica.

Apesar dos cuidados interpretativos que devem ser tomados ao se analisar os desenvolvimentos científicos recentes, eivados inclusive dos sintomas da moda — aos quais a ciência não está imune —, algumas lições importantes já podem ser tiradas. Além das conseqüências de caráter mais filosófico sobre o acaso, o determinismo e o significado das leis da natu-

reza, novas possibilidades descritivas surgem com esses modelos. Alimenta-se agora a esperança de que problemas importantes e até então insolúveis, como a turbulência nos fluidos, possam vir a ser adequadamente modelados. A possibilidade de se descrever sistemas mais flexíveis, com maior capacidade adaptativa, abre perspectivas diversas para se analisarem fenômenos ligados à vida e ao comportamento das populações. Nesse último caso, os modelos da ecologia matemática são significativos para o estudo da sobrevivência das espécies. A construção de novas formas de representação baseadas na computação gráfica, que geram figuras esteticamente belas — os fractais —, vem também estimular a imaginação de cientistas e artistas. Ciência e arte, se vistas como produto da criação humana, têm mais em comum do que usualmente parece.

Mais do que limitar o conhecimento científico, essas novas investigações ampliam nossos modelos descritivos da realidade. Os limites que ficam à mostra são, sim, aqueles de uma visão determinista particular — ainda utilizada, com freqüência, em discursos cientificistas e tecnocráticos — que extrapola para todos os domínios científicos um paradigma fundado na física clássica e que pressupõe um grau de predicabilidade além da possibilidade humana.

Neste número especial, com uma exceção, trazemos contribuições de vários cientistas brasileiros que trabalham no domínio amplo que estuda o comportamento complexo de sistemas não-lineares. Alguns outros, convidados a participarem deste número, não puderam fazê-lo por impossibilidades diversas. Em números futuros da *Ciência Hoje*, esperamos cobrir lacunas aqui deixadas e fornecer ao leitor um panorama amplo e atual dos novos conceitos, teorias e técnicas dessa área profundamente interdisciplinar da ciência contemporânea.

E para não se dizer que conseguimos falar do 'caos' sem tocar nos espinhos da ciência brasileira, remetemos o leitor para o diagnóstico lúcido e preciso do professor H. Moysés Nussenzweig, publicado na *Folha de S. Paulo* no último dia 13 de abril.

CAOS NO MUNDO ATÔMICO E SUBATÔMICO

Em 1917, Albert Einstein formulou umas de suas questões mais penetrantes com relação à teoria quântica. Isso aconteceu uma década antes da consolidação da teoria, mas a questão permaneceu ignorada durante 40 anos. Ele perguntou quais seriam os efeitos da quantização sobre sistemas que apresentam comportamento caótico na escala da mecânica clássica.

Sabemos agora que tais sistemas, longe de representarem casos patológicos, são antes a regra do que a exceção, o que torna a pergunta ainda mais pertinente. Entretanto, até hoje não temos mais do que os rudimentos de uma resposta. Existe caos em nível quântico? Há indicações de que isso acontece, mas o caos quântico se manifesta de forma muito mais sutil nessa escala do que na macroscópica, para a qual a física clássica fornece uma boa aproximação.

Nos sistemas clássicos, o caos se manifesta através de uma evolução a longo prazo extremamente irregular: o comportamento do sistema depende de forma tão sensível de sua situação inicial que se torna praticamente impossível prever essa evolução. Em meteorologia, um exemplo bem conhecido é o da previsão do tempo. Foi o matemático francês Henri Poincaré, no final do século passado, quem primeiro percebeu que sistemas clássicos com evolução regular, isto é, previsível a longo prazo, constituem uma categoria excepcional e minoritária.

No mundo atômico e subatômico descrito pela teoria quântica, o acaso desempenha um papel importante na observação de eventos individuais: estes têm de ser amplificados para que repercutam na escala macroscópica dos instrumentos de medida. Entretanto, o problema do caos na teoria quântica não diz respeito a esse tipo de acaso, associado à natureza estatística de suas previsões — que também molestava Einstein, firmemente convicto de que 'Deus não joga dados'. O problema está em saber se há alguma manifestação do caos na evolução de um sistema segundo as leis da mecânica quântica, detectável em grandezas observáveis de acordo com essas leis.

Uma diferença fundamental entre as leis de evolução clássica e quântica decorre da dualidade onda-partícula: um objeto da escala atômica não se comporta nem como partícula clássica nem como onda clássica, mas manifesta aspectos parciais de ambos os comportamentos.

A suavidade e regularidade do compor-

tamento ondulatório não parecem se conciliar com a extrema irregularidade do caos. De fato, os aspectos ondulatórios, acompanhados de efeitos característicos de interferência (reforço ou cancelamento entre cristas e vales de ondas superpostas), restringem fortemente as possibilidades de aparição do caos na evolução de sistemas quânticos. Esse fato levou alguns pesquisadores a negarem que isso pudesse acontecer. Entretanto, conforme relatado num recente e belo artigo de Martin Gutzwiller,* já foi detectada a existência de caos em alguns aspectos mais recônditos de tais sistemas.

Consideremos inicialmente um sistema quântico confinado a uma região limitada, tal como um átomo de hidrogênio, onde a distância elétron-próton permanece restrita à escala atômica. É característico das ondas confinadas que elas assumam um conjunto enumerável de *modos de vibração* possíveis, cada um deles associado a uma frequência de oscilação bem definida e a uma configuração espacial distinta, do tipo *onda estacionária*. Exemplos bem conhecidos são as oscilações de uma corda vibrante, membrana (tambor) ou coluna de ar, base dos instrumentos musicais de cordas, percussão ou sopro, respectivamente.

Também para um átomo, os estados estacionários confinados do elétron formam um conjunto discreto, correspondendo a seus diferentes níveis de energia possíveis, cada qual associado a uma configuração característica de ondas estacionárias. Normalmente, o átomo se encontra no estado de energia mínima (nível fundamental), mas ele pode ser excitado, absorvendo por exemplo energia de um feixe de luz *laser*, até um nível de energia mais alta.

Em estados altamente excitados, conhecidos como *estados de Rydberg*, a configuração atômica se aproxima da imagem clássica de um planeta (elétron) orbitando em torno do Sol (núcleo). Nessa situação *semiclássica*, podemos procurar eventuais reflexos quânticos de um comportamento caótico em nível clássico. É justamente o que ocorre quando um átomo de hidrogênio altamente excitado (átomo de Rydberg) é colocado num campo magnético intenso. Nessas circunstâncias, segundo as leis da mecânica clássica, o movimento do elétron passaria a ser caótico.

Que acontece quando o mesmo problema é tratado pela mecânica quântica? Os aspectos caóticos subsistem, mas se tornam

bem menos evidentes. Vamos encontrá-los na forma pela qual os níveis de energia atômicos estão distribuídos, particularmente ao examinarmos a probabilidade de que se encontrem ou não próximos entre si.

Paradoxalmente, num sistema quântico regular (não-caótico) não há correlação alguma entre os níveis de energia, ao passo que num sistema caótico eles estão fortemente correlacionados. Essa correlação se manifesta por um efeito de aparente 'repulsão' entre eles: é pouco provável encontrar dois níveis próximos um do outro. Para um sistema regular, pelo contrário, a probabilidade de que estejam próximos é elevada. Essa diferença radical se origina da possibilidade, que não existe para um sistema caótico, de decompor um sistema regular em subsistemas independentes.

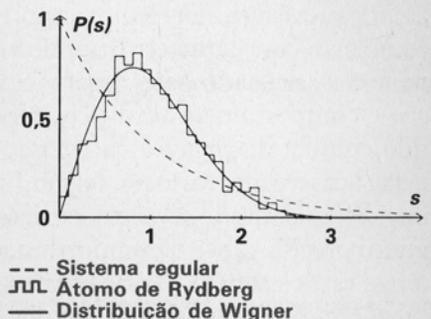


FIGURA 1. Probabilidade $P(s)$ de encontrar dois níveis de energia adjacentes, separados por uma distância s (em unidades arbitrárias). A curva em linha interrompida, que se aplica a um sistema regular, corresponde à distribuição de Poisson.

Conforme foi demonstrado por Oriol Bohigas e Marie-Joya Giannoni, a distribuição esperada dos níveis de energia para um sistema caótico coincide com uma distribuição anteriormente proposta por Eugene Wigner na física nuclear. A figura 1 mostra que a distribuição dos níveis de energia para um átomo de Rydberg num campo magnético intenso, conforme foi demonstrado por Dominique Delande e Jean-Claude Gay no periódico *Physical Review Letters* (vol. 57, nº 16, p. 2.006, 1986), é muito bem representada pela distribuição de Wigner — confirmando seu caráter caótico — e totalmente diversa da que ocorre para um sistema regular.

Também é possível reconhecer aspectos caóticos nas configurações de ondas associadas aos estados estacionários do átomo de Rydberg num campo magnético intenso. Ademais, elas ilustram um fato notá-

EXTRAÍDO DA PHYSICAL REVIEW LETTERS, VOL. 57, Nº 16, P. 2.008 (1986)

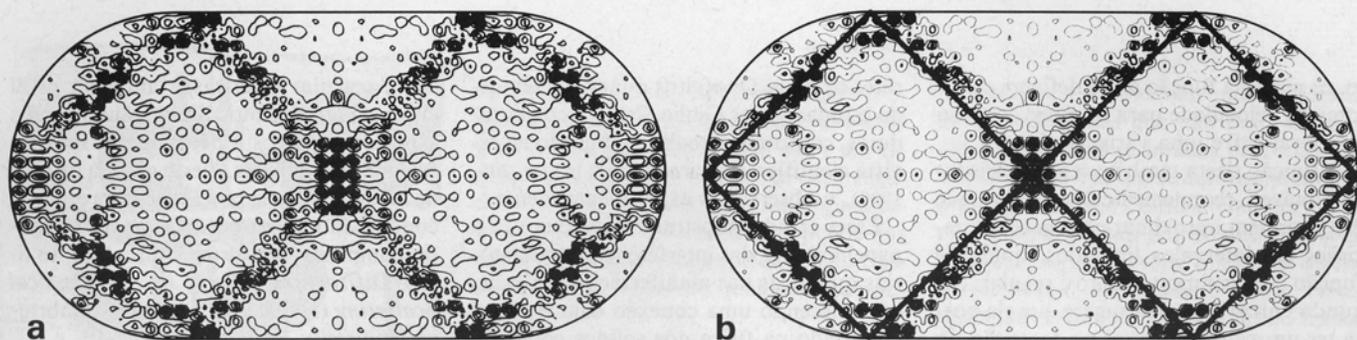


FIGURA 2. Configuração quântica de ondas estacionárias para um estado caótico de uma partícula num recipiente em forma de estádio (a). A intensidade se concentra em torno de uma 'cicatriz' associada à órbita clássica periódica instável ilustrada em (b).

vel: a persistência no regime caótico de traços de regularidade associados a órbitas clássicas periódicas. Uma órbita clássica é periódica quando é fechada, fazendo com que vá sendo descrita repetidamente em intervalos iguais, como a órbita da Terra em torno do Sol.

Foi Eric Heller, num trabalho publicado na *Physical Review Letters* (vol. 53, nº 16, p. 1.515, 1984), que demonstrou pela primeira vez esse efeito para um outro problema de estados confinados, o do movimento de uma partícula num 'estádio' (recipiente com a forma ilustrada na figura 2 em que a partícula se reflete nas paredes como uma bola de bilhar). O movimento clássico é caótico, com trajetórias que se espalham irregularmente por todo o recipiente. A configuração quântica estacionária da figura 2a mostra uma concentração da intensidade das ondas em torno de um canal estreito, associado à órbita clássica periódica instável indicada na figura 2b. Canais desse tipo são chamados 'cicatrices' de órbitas periódicas (ver 'Caos na mecânica quântica' nesta edição).

Poincaré já exprimira sua convicção de que na mecânica clássica as órbitas periódicas poderiam fornecer "a única abertura para atacar a fortaleza aparentemente inexpugnável do caos". Também na escala quântica, surpreendentemente, essas órbitas parecem deixar um legado marcante. A figura 3a reproduz resultados experimentais de Karl Welge e seus colaboradores (*Physical Review Letters*, vol. 61, nº 2, p. 161, 1988) para a eficiência de absorção de luz, como função da energia luminosa, por um átomo de hidrogênio altamente excitado num campo magnético intenso. Podemos notar que, nesse caso, o sinal observado parece caótico. Entretanto, quando ele é decomposto, segundo o processo conhecido por *análise de Fourier* (ou análise espectral), aparecem picos regulares (figura 3b). Cada pico, conforme ilustrado nessa figura, corresponde a uma órbita clássica periódica!

Gutzwiller demonstrou que, a partir de uma enumeração completa das órbitas clássicas periódicas, seria possível obter informações sobre a distribuição (espectro) dos níveis quânticos de energia. Seus resultados foram empregados por Michael Berry para o estudo de propriedades estatísticas do espectro.

Até aqui consideramos apenas os sistemas quânticos em que o movimento de um elétron é confinado, como um átomo, mas efeitos de caos quântico também se manifestam em sistemas não-confinados, nos quais o movimento do elétron não é espacialmente limitado. Um exemplo típico é o espalhamento de um elétron por uma molécula (espalhamento é um processo no qual uma partícula lançada contra um 'alvo' é por este desviada de sua direção inicial de movimento). A energia do elétron não fica mais restrita a níveis discretos, podendo variar continuamente.

A sinalização do caos aparece nesse processo através do chamado *atraso temporal* no espalhamento. Na ausência da molécula, um elétron de velocidade bem definida levaria um tempo correspondentemente também bem definido para percorrer uma dada distância. Ao ser espalhado pela molécula, esse tempo de percurso pode aumentar ou diminuir, dependendo dos detalhes do processo de espalhamento. A diferença de tempo resultante é o atraso temporal.

Num modelo solúvel extremamente simplificado de espalhamento quântico, que simula o espalhamento por uma molécula, Gutzwiller estudou como varia o atraso em função da velocidade do elétron incidente. A variação é suave, mas tem um caráter totalmente irregular (caótico) quando se considera um intervalo suficientemente grande de variação da velocidade.

No resultado do cálculo, aparece uma conexão fascinante com um dos objetos mais misteriosos da matemática, a *função zeta de Riemann*. Ela foi introduzida pelo matemático alemão Bernhard Riemann, em meados do século passado, para estudar a dis-

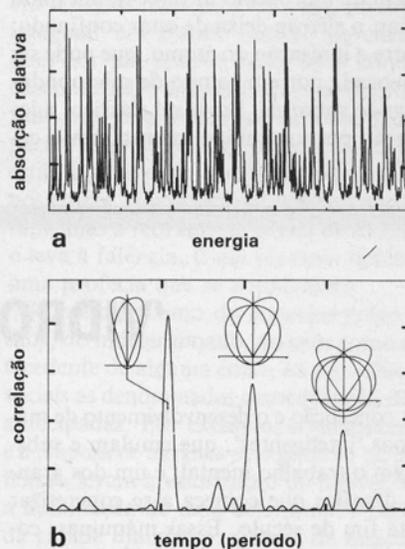


FIGURA 3. Em (a), vemos a eficiência de absorção de luz por um átomo de hidrogênio altamente excitado num campo magnético intenso, em função da energia luminosa. O sinal parece caótico. A parte (b) mostra, no espectro de Fourier correspondente, picos associados às órbitas clássicas periódicas indicadas na figura.

tribuição dos números primos (números tais como 2, 3, 5, 7, 11 etc., cujo único divisor inteiro menor do que eles é a unidade).

A função zeta é definida como função de uma variável complexa $x + iy$, onde $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária. A distribuição dos números primos está relacionada com os valores dessa variável para os quais a função se anula (denominados *zeros* da função zeta). Uma célebre conjectura de Riemann afirma que esses valores só ocorrem quando $x = 1/2$. Embora ela tenha sido verificada para mais de um bilhão de zeros, ninguém até hoje conseguiu demonstrá-la.

Os valores de y correspondentes aos zeros têm propriedades análogas aos níveis de energia de um sistema quântico caótico. Nessa analogia, os números primos desempenham o papel das órbitas clássicas periódicas. No problema de espalhamen-

to, os zeros da função dzeta definem os valores da velocidade para os quais o atraso temporal sofre uma variação forte.

A função dzeta também tem propriedades notáveis, recentemente descobertas, que lhe permitem aproximar com grande precisão, em intervalos limitados, qualquer função cujo comportamento é regular. Segundo Gutzwiller, isso sugere que ela possa ter um papel universal na descrição do caos quântico.

Quando a energia de excitação de um átomo de hidrogênio ultrapassa um dado limiar, o elétron deixa de estar confinado: ocorre a ionização do átomo, que pode ser provocada por um campo de microondas atuando sobre ele. Em nível clássico, a ionização por um campo intenso tem o ca-

ráter caótico. Os efeitos quânticos têm sido estudados por Giulio Casati e colaboradores, conforme trabalho publicado na revista científica *Physica A* (vol. 163, p. 205, 1990), e observados experimentalmente.

Esses estudos mostram mais uma vez o papel inibidor das interferências ondulatórias quânticas nas manifestações do caos, estabelecendo uma conexão com o efeito conhecido na física dos sólidos como *localização de Anderson*. Entretanto, quando se consideram as variações da probabilidade de ionização com a frequência de oscilação das microondas, observam-se flutuações extremamente rápidas e irregulares, de aparência caótica.

Flutuações semelhantes são encontradas na *espalhamento Mie* (espalhamento de luz

por partículas esféricas), tanto em nível clássico como quântico, mostrando alguns aspectos análogos à dependência sensível às condições iniciais. Nesse caso, a origem de tal dependência pode ser compreendida com auxílio da teoria do momento angular complexo, conforme é discutido no livro *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering* (H. M. Nussenzveig, Cambridge University Press, 1992)

* *Scientific American*, vol. 266, n° 1, p. 26, 1992

H. MOYSÉS NUSSENZVEIG

DEPARTAMENTO DE FÍSICA,
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

NEUROCOMPUTAÇÃO

'VIDROS' QUE IMITAM O CÉREBRO

A concepção e o desenvolvimento de máquinas 'inteligentes', que emulam e substituem o trabalho mental, é um dos grandes desafios que começa a se concretizar neste fim de século. Essas máquinas, conhecidas como *redes de neurônios* ou *redes neurais artificiais* (ou ANNs, do inglês *artificial neural networks*), são, na verdade, modelos cognitivos de um ramo da ciência chamado neurocomputação.

Atualmente, as ANNs já simulam em um computador algumas das funções — até então exclusivas do cérebro — como as de associação, categorização e reconhecimento de padrões. Nas ANNs, a informação é processada como no cérebro humano, isto é, através de um sistema de muitos elementos computacionais, os 'neurônios', interconectados por 'sinapses' que trocam sinais inibitórios ou excitatórios entre si. O comportamento 'inteligente' das ANNs decorre da ação simultânea e coletiva dessa 'rede de neurônios'. Graças às ANNs, diversas fábricas no Primeiro Mundo já empregam sistemas automatizados para inspeção e controle de qualidade e para uma enorme gama de atividades que envolvem a classificação de objetos, dados e informações complexas.

As ANNs têm uma grande vantagem operacional: não necessitam de processos complicados de programação para o estabelecimento de suas 'memórias' de trabalho. Estas são facilmente 'aprendidas' quando

os padrões são simplesmente 'mostrados' ao sistema. Nesse processo, as interconexões entre os 'neurônios' são automaticamente modificadas e o padrão fica registrado como uma 'memória'.

Se uma imagem qualquer é apresentada ao sistema, a computação dessa informação se propaga aleatoriamente sobre um grande número de conexões, em busca da memória que mais se assemelha àquela imagem. Dessa forma, o sistema pode 'reconhecer' imagens imperfeitas ou incompletas, como faz trivialmente o cérebro humano (ver *Ciência Hoje* n° 70).

Para que essas máquinas se tornassem realidade, foi necessário reunir conhecimentos de ciências como a neurofisiologia, a psicologia, a ciência da computação, a matemática, a engenharia eletrônica e a física. Nos anos 80, a contribuição da física estatística foi decisiva para a chamada via conexionista das ANNs, assim como, há 150 anos, a termodinâmica desempenhou um papel teórico crucial para a concepção das máquinas de potência (máquinas a vapor), que vieram substituir o trabalho animal.

Essa contribuição foi possível graças a uma feliz analogia entre as ANNs e um modelo estatístico proposto para explicar o comportamento de certas ligas magnéticas diluídas, denominadas vidros-de-*spin*, cujo arquétipo é a liga de cobre e manganês.*

Nos vidros-de-*spin*, os átomos magnéticos, isto é, os de manganês (Mn), estão distribuídos ao acaso pela matriz metálica, formada pelos átomos de cobre (Cu). Os momentos magnéticos desses átomos, que podem ser vistos como pequenos ímãs elementares associados a uma propriedade intrínseca da matéria chamada de *spin*, interagem entre si, de tal forma que, em baixas temperaturas, os momentos magnéticos ou os *spins* ficam 'congelados' em direções completamente aleatórias. O contrário ocorre nos chamados materiais ferromagnéticos, nos quais os *spins* ficam espontaneamente paralelos a uma única direção.

Da semelhança entre o estado no qual os *spins* estão congelados em direções completamente aleatórias e aquele que ocorre nos vidros comuns — com os átomos espacialmente distribuídos em posições fixas, porém completamente aleatórias —, decorre o curioso nome de vidro-de-*spin*, palavra que mistura desordem com magnetismo.

O comportamento dos vidros-de-*spin* é completamente bizarro. Esse material apresenta muitas anomalias em suas propriedades físicas, sinalizando a existência de uma possível transição abrupta de uma fase desordenada (paramagnética) para uma fase congelada (vidro-de-*spin*).

As transições de fase, é bom lembrar, são fenômenos corriqueiros na natureza, a exemplo das transições estruturais sólido-líquido (fusão) ou líquido-vapor (ebulição).



Porção de uma 'paisagem de energia' de uma rede neural artificial (ANN). No processo de aprendizagem, as conexões entre os 'neurônios' são ajustadas de maneira que cada ponto representa um padrão de informação. As 'memórias' ficam localizadas no fundo dos vales, funcionando como 'atratores'. Esse mecanismo de memória (associativa) permite que uma informação parcial ou imperfeita, apresentada à ANN, 'evolua' até o fundo do vale correspondente, revelando o conteúdo completo do padrão de informação armazenado (ou memorizado).

Nos materiais magnéticos, a transição mais conhecida é a ferromagnética. Ela ocorre quando o material se torna um ímã (estado ferromagnético) e a temperatura está abaixo de um certo valor crítico. Nos vidros-de-*spin*, entretanto, a observação de certos fenômenos de magnetismo remanescente, como os efeitos de irreversibilidade ou histerese, que são manifestações de retardo ao equilíbrio, sugere que a transição poderia ser de natureza vítrea.

Essa contradição estimulou a curiosidade e a imaginação dos teóricos. Em meados de 1975, eles formularam um modelo simples, porém solúvel, que continha os ingredientes essenciais do sistema. Esse modelo é formado por um conjunto de muitos *spins*, todos conectados entre si, dois a dois, no qual cada *spin* tem apenas dois estados: só pode estar paralelo ou antiparalelo a uma direção dada. Cada *spin* está correlacionado com os demais através de uma energia de ligação que pode ter aleatoriamente valores positivos ou negativos, segundo uma distribuição de probabilidade. Essa aleatoriedade simula a desordem espacial dos átomos magnéticos.

A analogia com as ANNs e o modelo de vidro-de-*spin* é, grosso modo, a seguinte: os momentos magnéticos fazem o papel dos neurônios; as conexões, o das sinapses. As correspondentes energias de ligação representam a eficácia das sinapses. Uma rede de neurônios simplificada pode ser imaginada como um conjunto de elementos neuronais do tipo 'tudo ou nada', isto é, esta-

do ativo ('tudo') ou passivo ('nada'), todos conectados entre si, aos pares.

A hipótese de interação 'todos com todos', conhecida no jargão da física como aproximação de campo médio, é pouco realista para os vidros-de-*spin*, uma vez que os momentos magnéticos em geral só interagem efetivamente com sua vizinhança. Porém, essa hipótese é muito apropriada para modelar a arquitetura do cérebro animal, onde cada neurônio tem cerca de dez mil (10^4) conexões. Há, no entanto, um obstáculo importante nessa analogia. No sistema de *spins*, as ligações entre eles são simétricas: a energia de ligação de um *spin* A com um *spin* B é igual àquela do *spin* B com o *spin* A. Em um sistema de neurônios não há qualquer razão para que as sinapses sejam simétricas. Muito pelo contrário, o sinal recebido por um neurônio A através de uma sinapse com B não é certamente igual àquele disparado através do seu axônio, que eventualmente poderia ter uma sinapse com B. Todavia, John J. Hopfield, astucioso físico — que mais tarde se tornaria também biólogo —, abriu mão dessa característica dos neurônios. No seu modelo, as sinapses poderiam ser simétricas. Com isso, pôde definir o que seria a 'energia' abstrata das configurações das atividades neuronais. Portanto, assim como nos vidros-de-*spin*, a evolução dinâmica do modelo de Hopfield é governada pela minimização dessa 'energia', atingindo um ponto fixo onde ela é mínima localmente.

As flutuações que aparecem espontaneamente nas transições sinápticas são introduzidas nas ANNs por um parâmetro que desempenha o mesmo papel da temperatura no sistema de *spins*. No modelo de vidro-de-*spin*, em baixas temperaturas, o estado de cada *spin* é determinado pela configuração dos demais, de tal forma que a energia total do sistema (soma das energias de cada par de *spins*) seja mínima.

Já a energia de cada par de *spins* será mínima quando a energia de interação for negativa e os *spins* estiverem no mesmo estado (paralelos) ou positiva, com os *spins* em estados diferentes (antiparalelos). Como as energias de ligação são aleatoriamente positivas e negativas, a determinação das configurações de baixa energia em um vidro-de-*spin* é um autêntico problema de otimização. Há um grande número de configurações de *spins* com baixa energia, todas completamente diferentes entre si.

As configurações de *spins* podem ser visualizadas como uma 'paisagem de energia', com muitos 'vales' profundos e altas 'montanhas'. No 'mapa topográfico' des-

sa paisagem, cada ponto representa uma configuração e cada cota seria dada pela 'energia' da configuração. Para cada conjunto de energias de ligação corresponde uma paisagem de energia.

A análise da solução do modelo de vidro-de-*spin* revela uma paisagem de energia complexa e imbricada, com vales dentro de vales, dentro de vales e assim por diante, tendo uma estrutura em árvore (chamada ultramétrica). A dinâmica do sistema é descrita como um 'passeio' de um ponto nessa paisagem, onde a passagem de um vale para outro exigiria certa energia para vencer as barreiras.

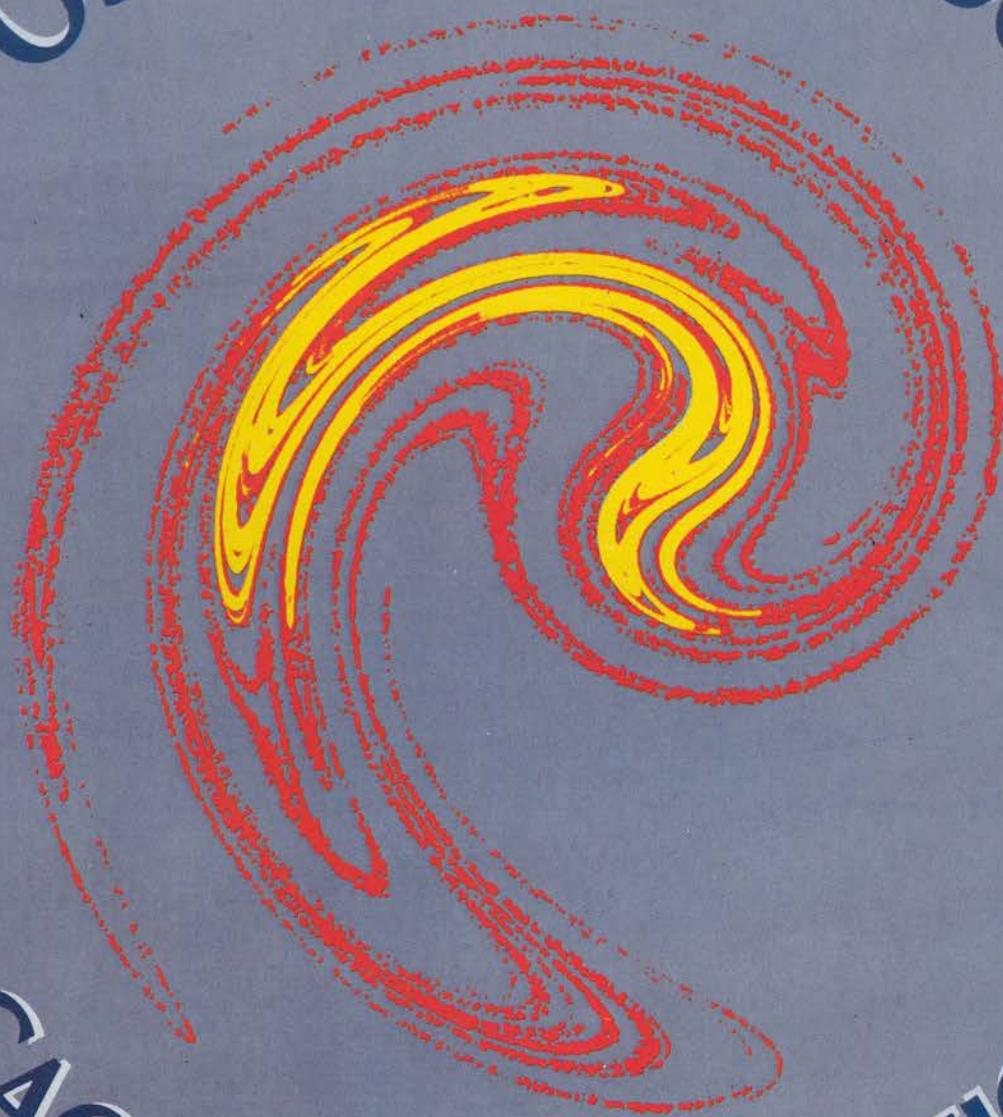
A paisagem de energia de um vidro-de-*spin*, com seus múltiplos vales, é uma perfeita metáfora para a descrição do funcionamento de uma ANN com memórias. As configurações correspondentes aos vales mais profundos são justamente as memórias do sistema. A apresentação de uma imagem-estímulo coloca a ANN na sua configuração representativa. Esta evoluirá segundo uma dinâmica própria, que tende a minimizar a 'energia' convergindo para o fundo do vale mais próximo.

O fundo de cada vale age como um 'atrator' para as configurações situadas no vale, funcionando como um registro ou uma 'memória' dessas configurações. Esse processo de reconhecimento de um padrão tem, portanto, 'memórias' endereçáveis por conteúdo, associativas e distribuídas. Em outras palavras, pode-se alcançar uma 'memória' com base numa fração do seu conteúdo ou a partir de uma imagem imprecisa ou defeituosa e armazená-la no conjunto de eficácias sinápticas da rede de neurônios. Além disso, essas 'memórias' têm a propriedade de sobreviver mesmo se parte da rede for destruída.

Essa idéia de um modelo para a memória, baseado em um processo dinâmico de 'evolução para um atrator', é, sem dúvida, uma das contribuições mais notáveis da física estatística ao estudo das ANNs. Será esse o processo utilizado nas partes superiores do córtex? Essas e outras questões importantes restam ainda em aberto.

* La Recherche, vol. 22, nº 232, p. 616, 1991.

OS PRIMÓRDIOS DO



CAOS DETERMINÍSTICO

“E vê primeiro, em cores variadas,
Do velho Caos a tão confusa face;”

(Camões, *Os Lusíadas*, Canto VI, 10)

Ildeu de Castro Moreira
Instituto de Física,
Universidade Federal do Rio de Janeiro

O desenvolvimento recente do estudo dos sistemas caóticos na física, na matemática e em outros ramos das ciências trouxe novos e importantes elementos de reflexão sobre uma questão fundamental na história das ciências: o papel do acaso e do determinismo no quadro conceitual construído pelo homem em sua tentativa de analisar e de prever o comportamento da natureza. Caudatária de uma longa história que remonta, pelo menos, aos pré-socráticos, essa questão foi sempre recolocada e vista sob nova óptica a cada transformação importante nas teorias físicas.

O ACASO E A NECESSIDADE

Originalmente, a palavra caos foi associada a um 'estado desordenado antes da criação do universo' e a uma 'grande confusão, desordem'. Hoje, a palavra recebe, em acréscimo, um significado novo, mais específico, de comportamento aleatório ocorrendo em sistemas determinísticos. Por sistemas determinísticos, entenderemos qualquer modelo dinâmico baseado em regras bem definidas e que associam, num determinado instante de tempo, valores únicos às variáveis que descrevem o sistema, a partir do conhecimento dessas mesmas variáveis em instantes anteriores.

O significado do termo *caos determinístico* refere-se, de maneira genérica, à propriedade de muitos sistemas determinísticos de apresentarem grande sensibilidade a pequenas variações nas condições iniciais.

Isto significa que, neste caso, as incertezas experimentais, sempre presentes em qualquer mensuração física, crescerão muito rapidamente com o passar do tempo, levando a uma quebra do determinismo absoluto, mesmo no terreno da física clássica. Já os sistemas denominados *integráveis* — que, sabe-se hoje, são exceção entre os modelos descritos por relações não-lineares — têm comportamento regular, periódico (ou quase) e, portanto, não-caótico.

Já na Antigüidade Clássica, a questão do determinismo e do acaso foi colocada ao se tentar 'entender' os fenômenos naturais. Em 585 a.C., Tales de Mileto previu corretamente um eclipse. Um sucesso preditivo que certamente influenciou as concepções determinísticas já existentes. Entre os pré-socráticos, começou a ser forjada a visão de um comportamento necessário e bem regulado para o universo material.

Leucipo sintetizou essa idéia numa frase que se tornou ponto de referência desde então: “Nenhuma coisa se engendra ao acaso, mas todas (a partir) da razão e por necessidade.”

Com Aristóteles, o princípio da causalidade deixa um lugar para a contingência pura, para o acidental, para aquilo que constitui o acaso. A ciência só se ocupa do geral e não se aplica ao fenômeno singular. Na época helenística, numa disputa importante, os estóicos afirmaram um determinismo rigoroso da natureza, enquanto os epicuristas rejeitaram o determinismo estrito.

A idéia de uma ‘declinação’ (*clinamen*) presente no movimento dos átomos se tornou responsável, mesmo entre filósofos materialistas, pela possibilidade do imprevisível, do novo. A presença dessa pequena declinação era suficiente para salvaguardar o livre-arbítrio na natureza. No *De rerum natura*, Lucrécio pergunta: “Se todo movimento é solidário de outro e sempre um novo sai de um antigo, segundo uma ordem determinada, se os elementos não fazem, pela sua declinação, qualquer princípio de movimento que quebre as leis do destino, de modo que as causas não se sigam perpetuamente às causas, donde vem esta liberdade que têm os seres vivos? Donde vem este poder solto dos fados, por intermédio do qual vamos aonde a vontade nos leva e mudamos o nosso movimento, não em tempo determinado e em determinada região, mas quando o espírito o de-seja?”

Cícero, por sua vez, expressa uma idéia oposta, ou seja, a suposição de que uma inteligência superior poderia abarcar todo o conhecimento momentâneo sobre o universo e, a partir das leis necessárias que regem o comportamento do universo, prever todos os acontecimentos futuros com absoluta certeza. Para esse filósofo, “se houvesse um homem cujo espírito pudesse discernir as relações que ligam as causas entre si, então, seguramente, não poderia se enganar nunca em qualquer predição que fizesse. Porque aquele que sabe as causas dos eventos futuros necessariamente sabe como cada evento futuro ocorrerá.”

A questão do determinismo e do acaso atraiu muitos pensadores ao longo dos séculos subseqüentes e trouxe, ligada a ela, uma perspectiva moral, a disputa entre o determinismo da natureza e o livre-arbítrio dos homens. Os pensadores religiosos e os teólogos debateram-na exaustivamente. No universo cristão da Idade Média, começou a se firmar a idéia de um Deus que ditava as regras também para o comportamento material, embora a imagem de uma natureza absolutamente ordenada tivesse dificuldade em ser aceita, diante das possibilidades permanentes dos milagres e da inter-

venção da graça divina. Por outro lado, a astrologia e a alquimia, com a concepção da existência de relações bem-determinadas de causa e efeito entre os fenômenos, contribuíram também para o desenvolvimento de uma imagem da natureza baseada na crença em uma ordem racional, o que favorecia a busca de regularidades e a experimentação.

DA FÍSICA DE NEWTON AO DEMÔNIO DE LAPLACE

Com Galileu, Kepler, Newton, Leibniz e outros, o determinismo se liga à idéia de ‘lei natural’, de ‘simplicidade da natureza’ e vai encontrar uma expressão precisa na formulação matemática das leis físicas. Em particular, a introdução progressiva do conceito de variação contínua dos parâmetros (noção de derivada) para descrever localmente fenômenos físicos é essencial pa-

grande facilidade em qualquer ponto em terra e poderiam ser facilmente encontradas no mar, sem a ajuda de um telescópio que não pode ser aí usado.” Para Newton, as previsões feitas através do conhecimento das forças e das equações do movimento podem ser conhecidas com certeza. Mas elas são parciais, porque as forças somente não determinam o curso natural das coisas. Esse papel é desempenhado também pelos princípios ativos. Para esse físico e matemático inglês, há lugar para o determinismo das forças, coexistindo com a liberdade de Deus.

A construção, extensão e afirmação do paradigma newtoniano, baseado na idéia de forças que agem localmente e na descrição matemática através de equações diferenciais, se estende pelos séculos XVIII e XIX. O problema da integração dessas equações, ou seja, o de calcular as funções que as satisfazem, é discutido nos traba-



ra precisar essa idéia e dar-lhe foros de um novo paradigma. Mesmo Newton, ao tentar entender e prever o movimento da Lua — um caso particular do chamado ‘problema dos três corpos’, no qual interagem o Sol, a Terra e a Lua pela atração gravitacional —, já se depara com as primeiras dificuldades matemáticas desse tipo de situação. Em 1702, escreve: “A irregularidade do movimento da Lua tem sido a justa lamentação dos astrônomos; sempre olhei para isso como uma grande desgraça, que um planeta tão perto de nós como está a Lua, que poderia ser tão maravilhosamente útil por seu movimento, tão bem como por sua luz e atração (...), tenha sua órbita tão incontavelmente variada que é temerário, de certo modo, confiar no cálculo de um eclipse ou de uma passagem que nunca é feita muito acuradamente. Se sua posição pudesse ser calculada precisamente, as longitudes dos lugares seriam achadas com

lhos de Bernoulli, de Euler e de Lagrange, em conexão com as diversas aplicações das idéias newtonianas à mecânica. Somente aqueles problemas que podiam ser resolvidos através de um número finito de operações algébricas e ‘quadraturas’ (cálculo de integrais de funções conhecidas) eram considerados como solúveis (integráveis).

No entanto, ao abordar problemas mais complicados que o do movimento de sistemas mecânicos integráveis, os criadores da mecânica clássica se deparam, com frequência, com situações nas quais sua matemática estanca. Euler, falando sobre as equações de movimento dos fluidos, diz: “Se não nos é permitido penetrar a um conhecimento completo sobre o movimento dos fluidos, não é à mecânica e à insuficiência dos princípios conhecidos do movimento que se deve atribuir isto, mas à própria análise que aqui nos abandona...” Mas a noção predominante, reforçada no

ensino e nos livros que tratavam unicamente dos problemas solúveis — o que ocorre ainda hoje, em boa medida —, era a de que não haveria problemas que não pudessem ser integrados, mas apenas problemas *ainda não resolvidos*. E o desenvolvimento das máquinas, aparatos construídos para terem um comportamento estritamente previsível, contribuiu certamente com seu sucesso para o fortalecimento dessas idéias.

Os modelos nos quais os cientistas desse período vão se basear para estudar a natureza e os homens em outros ramos do conhecimento são aqueles atacados com sucesso preditivo pela mecânica. O pêndulo passa a simbolizar, talvez melhor do que qualquer outro sistema mecânico, a periodicidade e o comportamento previsível na natureza. Já os fenômenos complexos como a turbulência dos fluidos, o movimento de corpos rígidos não-simétricos, que a mecânica já procurava abordar, são deixados de lado enquanto modelos. Na formação do paradigma mecanicista, esses 'detalhes' complexos são esquecidos ou remetidos para uma perspectiva de resolução futura e certa. Houve, no entanto, cientistas que resistiram a esse predomínio filosófico do determinismo estrito. O próprio Euler, por exemplo, despence muitas páginas para convencer o leitor da existência de eventos que escapam ao determinismo das leis mecânicas e que garantem o livre-arbítrio dos homens.

O grande sucesso das teorias desenvolvidas por Newton e seus sucessores nas previsões sobre o movimento das marés, a forma da Terra, o movimento dos cometas, a existência de planetas, a dinâmica dos corpos, entre outros, deram alento aos defensores do determinismo. Mesmo o cálculo das probabilidades, iniciado por Fermat e Pascal, embora introduza o elemento de chance na análise matemática, tem como pressuposto de fundo o determinismo mecanicista e a idéia de conexão causal. O surgimento dessa nova idéia pressupõe que a natureza seja tomada como um livro escrito por Deus e ocorre *pari passu* com o desenvolvimento do determinismo mecanicista. O Deus legislador do século XVI e XVII integra o determinismo e a probabilidade.

Nos séculos XVIII e XIX, com a 'matemática social' de Maupertuis, Condorcet, Quetelet, se tenta estender, sem o mesmo sucesso, o modelo mecanicista para as ciências 'morais e políticas'. Os conceitos e procedimentos do cálculo das probabilidades permitiam tratar eventos sociais através de 'leis' estritas e estáveis à semelhança da física — pelo menos, era o que se imaginava. Em seu discurso de recepção na Academia de Ciências, em 1769, Condorcet afirmava: "Meditando sobre a natureza das ciências morais, não se pode deixar de

ver que, apoiadas como as ciências físicas sobre a observação dos fatos, devem seguir o mesmo método, adquirir uma linguagem igualmente exata e precisa, atingir o mesmo grau de certeza." Essa esperança, em graus variados, está presente nos principais representantes do iluminismo. Mencionamos, de passagem, a ação fertilizadora que essas tentativas de matematização das ciências sociais, freqüentemente movidas por interesses econômicos de segurança social e influenciadas por fatores de ordem ideológica, filosófica e religiosa, trouxeram para o desenvolvimento dos estudos estatísticos. No *Ensaio filosófico sobre as probabilidades*, de 1814, Laplace introduz, dando prosseguimento e precisão à idéia surgida com Cícero, o conceito de uma inteligência superior, o chamado *demonio de Laplace*, que poderia abarcar todo o conhecimento futuro e passado: "Devemos, portanto, ver o estado presente do universo como o efeito do seu estado anterior, e como a causa daquele que virá. Uma inteligência que, em qualquer instante dado, soubesse todas as forças pelas quais o mundo natural se move e a posição de cada uma de suas partes componentes, e que tivesse também a capacidade de submeter todos estes dados à análise matemática, poderia encompassar na mesma fórmula os movimentos dos maiores objetos do universo e aqueles dos menores átomos; nada seria incerto para ele, e o futuro, assim como o passado, estaria presente diante de seus olhos... Todos os esforços na busca da verdade tendem a levá-la [a mente humana] cada vez mais próxima daquela inteligência que consideramos, mas que ainda permanecerá sempre infinitamente inatingível."

O fato de essa declaração, símbolo do determinismo estrito, ocorrer num tratado sobre as probabilidades atesta, talvez, que seu conceito de probabilidade está ligado às limitações do conhecimento humano. A ignorância de causas e de dados, fruto dessas limitações e que tende a diminuir com o avanço do conhecimento, é compensada pelo uso da probabilidade no caso de eventos muitos numerosos; daí a possibilidade de submeter ao método científico questões de variada ordem, como as sociais, morais, políticas e jurídicas.

É importante se notar que também nas situações experimentais foram feitos registros de comportamento caótico (complexos e aperiódicos) de sistemas dinâmicos, em particular em mecanismos com movimentos vibratórios ou oscilatórios. Em 1840, o astrônomo e construtor de instrumentos G.B. Airy relata o comportamento de um dispositivo, um pêndulo girante, construído para a observação de estrelas fixas, através do movimento de um telescópio em oposição ao movimento de rotação da Terra. Ele observou que o dispositivo não era

sempre estável mas, para certa velocidade de rotação "...a máquina (se posso me expressar assim) tornou-se perfeitamente selvagem". Mas como seu interesse estava ligado à construção de um aparelho de medida, máquina de comportamento regular e previsível, desconsiderou o domínio de variáveis em que esse comportamento complexo ocorria. Provavelmente, outros estudiosos observaram fenômenos semelhantes, que sequer chegaram a ser registrados por fugirem ao interesse do experimentador e por escaparem do domínio conceitual e analítico conhecido na época.

LIVRE-ARBÍTRIO VERSUS DETERMINISMO: DE MAXWELL A POINCARÉ

Na segunda metade do século XIX, dois momentos especiais surgem dentro de nossa perspectiva de análise. O primeiro deles, o desenvolvimento da teoria cinética dos gases, teve profundas conseqüências na física ao gerar um modelo estatístico que descrevia sistemas com muitos graus de liberdade: o elemento estatístico entrava no desconhecimento das condições iniciais do sistema, constituído de um número muito grande de partes. Uma segunda série de acontecimentos refere-se à disputa acirrada entre pensadores católicos e materialistas sobre as relações entre ciência e religião. Em pauta, a discussão sobre as teorias evolucionistas e os avanços das ciências físicas, em particular a lei da conservação de energia que, para o pensamento materialista, dispensava a existência de um princípio vital para se entender os organismos vivos. Retorna à cena — e aceso — o debate sobre o determinismo e o livre-arbítrio.

Na tentativa de resolver esse impasse, duas respostas são oferecidas, em seqüência, pelos cientistas e filósofos críticos do determinismo estrito, ou seja, numa primeira fase, a validade da mecânica newtoniana é aceita, mas o seu caráter determinista é questionado no sentido físico. Os representantes mais nítidos dessa posição são Boussinesq e Saint-Venant. Maxwell pode ser incluído nesse contexto, mas, como veremos a seguir, se destaca por uma percepção física e filosófica mais profunda da questão. Na segunda fase, já no final do século XIX, forja-se uma visão de lei natural que torna as leis científicas contingentes em relação à liberdade criativa do homem. Essas idéias surgem com Boutroux, ganham corpo e formulação precisa em Duhem e vão influenciar profundamente Poincaré.

Começamos por Maxwell, que vai com grande originalidade atribuir um caráter de incerteza intrínseca ao conhecimento estatístico, rompendo com a visão tradicional que associava a perspectiva causal aos cálculos probabilísticos. Mostra também uma

visão surpreendentemente clara, aos olhos de hoje, das limitações físicas do determinismo absoluto (ver 'Maxwell e o livre-arbítrio'). Um dos parceiros de James Clerk Maxwell em suas discussões filosóficas, o engenheiro Balfour Stewart faz uma descrição, em 1875, dessas idéias: "Vemos que, relativamente à energia, existem estruturas de dois tipos na natureza. Em uma delas, o objetivo em vista é a regularidade de ação, obtida por intermédio de um arranjo estável das forças naturais (exemplos são o sistema solar, o cronômetro, a máquina a vapor). Na outra, busca-se a liberdade de ação e uma transformação brusca de energia, resultante de um arranjo instável das forças naturais. A primeira série de máquinas é caracterizada pela calculabilidade e a segunda, pela incalculabilidade; a primeira, uma vez em atividade, é dificilmente alterada; a outra é caracterizada por uma grande delicadeza de construção." E acrescenta: "Um animal é uma máquina delicadamente construída."

Passemos ao físico francês Joseph Boussinesq. Em 1877, ele explora o paradoxo introduzido por Poisson (1806), no qual se aponta a existência das chamadas soluções singulares para certos sistemas de equações diferenciais. Esses sistemas apresentam situações de bifurcação, em que coexistem

duas ou mais soluções, que podem ser utilizadas como um 'mecanismo' para o livre-arbítrio. Este poderá optar por uma solução entre uma multiplicidade delas mecanicamente disponíveis. Boussinesq introduz, então, a idéia, que já circulava no contexto da época, de um *princípio diretor* (o eu que julga e deseja) que permitiria aos seres vivos fazerem a escolha do 'caminho' a seguir. Para ele, as vias nunca se bifurcam no mundo inanimado, mas para os seres vivos elas o fazem, satisfazendo, no entanto, as leis da mecânica.

Todos os personagens dessa fase têm traços em comum. Fazem uma tentativa filosófica, com motivação religiosa, de reconciliar o livre-arbítrio com o determinismo das leis da natureza. Além disso, pesquisam sistemas clássicos complexos. Maxwell estuda mecânica estatística e gases; Boussinesq, fluidos; Saint-Venant, elasticidade; e Stewart, engenharia e máquinas.

Mesmo tendo recebido forte contestação, as idéias de Boussinesq tiveram repercussão na época. As críticas antecipavam já a mudança de perspectiva sobre o significado das leis da natureza que viria a seguir. Um passo importante nessa direção é dado por Emile Boutroux, com sua tese de 1874, denominada *Sobre a contingência das leis da natureza*. O argumento neokantiano de Boutroux é que as leis naturais são

contingentes e não necessárias: nós criamos as leis científicas apesar de sermos dependentes da experiência ao fazê-lo. Longe de tornar indeterminada a certeza da liberdade moral, a nova filosofia da ciência que se inicia vai tornar indeterminada a certeza das leis físicas. A expressão mais acabada do convencionalismo então emergente pode ser encontrada no físico e filósofo da ciência Pierre Duhem.

Do final do século XIX provém a maior contribuição individual para o estudo dos sistemas complexos, de comportamento caótico. A questão mais importante e que dá origem a uma seqüência de trabalhos científicos de grande relevo é o *problema dos n-corpos*, originário do estudo da estabilidade do sistema solar, na mecânica celeste. Poincaré irá mostrar que o problema não é integrável no caso geral, podendo apresentar comportamentos extremamente complicados mesmo se apenas três corpos interagem gravitacionalmente. Esse matemático francês introduziu também o que chamou estudo 'qualitativo' das soluções dos sistemas dinâmicos, em oposição ao estudo 'quantitativo', até então predominante. Anteriormente, os analistas dedicavam seu interesse ao estudo de soluções individuais, enquanto a perspectiva cambiante de Poincaré leva-o a considerar as relações mútuas entre o conjunto de solu-

MAXWELL E O LIVRE-ARBÍTRIO

Em uma de suas conferências, de 1873, intitulada *O progresso das ciências físicas tende a dar vantagem à opinião da Necessidade (ou Determinismo) sobre aquela da contingência dos eventos e do livre-arbítrio?*, Maxwell afirma: "É uma doutrina metafísica que os mesmos antecedentes produzem sempre os mesmos conseqüentes. O axioma físico, semelhante a este, afirma que 'de antecedentes similares seguem-se conseqüentes similares'. Mas aqui passamos da igualdade para a similaridade, da precisão absoluta para uma aproximação mais ou menos grosseira. Há certas classes de fenômenos (...) nos quais um pequeno erro nos dados somente introduz um pequeno erro no resultado. O curso dos eventos nesses casos é estável. Há outras classes de fenômenos, que são mais complicados, nos quais instabilidades ocorrem e o número de tais casos cresce de maneira extraordinariamente rápida quando o número de variáveis aumenta."

Maxwell fala de 'pontos singulares' ou 'limites de domínios de atração (bacias)', em que um desvio imperceptível é suficiente para levar o sistema a cair em domínios diferentes. São pontos onde influências, cuja magnitude física é muito pequena para ser levada em conta, podem produzir posteriormente efeitos de grande importância. Fornecem alguns exemplos interessantes desse tipo de situação uma bola de bilhar chocando-se com outras que estão fixas, a explosão do algodão-pólvora, a refração da luz em cristal biaxial, as pequenas ações humanas que provocam grandes alterações sociais etc. A partir disso, desenvolve uma concepção instigante sobre os seres vivos e o livre-arbítrio. Segundo ele, o número de pontos singulares e, portanto, de situações nas quais variações muito pequenas podem mudar o curso do sistema significativamente cresce com a complexidade do sistema. Assim, o homem teria o grau de livre-arbítrio mais elevado em função de sua maior complexidade.

O último parágrafo desse ensaio de Maxwell sintetiza uma visão premonitória inegável: "Se, portanto, aqueles cultores da ciência física forem levados, (...) na busca dos segredos da ciência, ao estudo das instabilidades e singularidades, ao invés do estudo das continuidades e estabilidades das coisas, a promoção do conhecimento natural pode tender a remover aquele preconceito em favor do determinismo que parece surgir ao se assumir que a ciência física do futuro é uma mera imagem ampliada daquela do passado."



James Clerk Maxwell (1831-1879), físico escocês, foi um dos criadores do eletromagnetismo, cujas equações fundamentais receberam seu nome, unificando a eletricidade, o magnetismo e a óptica. Juntamente com M. Faraday, introduziu o conceito de 'campo', uma das idéias básicas da física contemporânea. Deixou também contribuições decisivas na termodinâmica, teoria dos gases e mecânica estatística.

POINCARÉ E AS RAÍZES DO ACASO

No livro *Ciência e método*, publicado no início deste século, Poincaré expõe com muita clareza a problemática resultante da sensibilidade do sistema às condições iniciais. Alguns dos exemplos mais simples e interessantes de várias áreas das ciências são aí discutidos e podem ser tomados como ilustrações em qualquer livro moderno sobre sistemas caóticos.

Mas deixemos que ele próprio fale, numa passagem que lembra imediatamente as idéias expostas por Maxwell: "Uma causa muito pequena que escapa de nossa observação determina um efeito considerável que não podemos deixar de ver; dizemos então que o efeito é devido à chance. Se soubéssemos exatamente as leis da natureza e a situação do universo no instante inicial, poderíamos prever exatamente a situação do mesmo universo em um momento posterior. Mas, mesmo se fosse o caso de as leis da natureza não serem segredo para nós, poderíamos ainda conhecer as condições iniciais somente 'aproximadamente'. Se isto nos permitisse prever a situação posterior 'com a mesma aproximação', isso seria tudo o que queríamos e diríamos que o fenômeno foi previsto, isto é, é governado por leis. Mas não é sempre assim: pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais venham a produzir diferenças muito grandes nos fenômenos finais. Um pequeno erro nos antecedentes pode produzir um erro enorme nos acontecimentos posteriores. A predição se torna impossível e temos um fenômeno fortuito."

Em seguida, Poincaré aponta as duas raízes principais para o surgimento da chance da natureza: (1) sensibilidade do sistema às condições iniciais, ou seja, a grande influência dos pequenos erros iniciais, mesmo quando as leis da natureza forem inteiramente conhecidas e (2) complexidade das causas, ou seja, o fato de que ao analisarmos qualquer sistema sempre levamos em conta apenas parte das influências (forças) às quais o objeto está submetido. No entanto, afirma, "nada do que foi dito antes explica por que a chance é obediente a leis".



Henri Poincaré (1854-1912) foi um dos grandes cientistas de todos os tempos. Dotado de grande intuição matemática, realizou trabalhos importantes em quase todos os ramos da matemática, além de contribuir significativamente para a física (mecânica celeste, relatividade, eletromagnetismo) e para a filosofia da ciência. É considerado o principal precursor dos estudos atuais sobre sistemas dinâmicos e caos determinístico.

ções. Além de desenvolver métodos poderosos e de demonstrar alguns resultados básicos, muitos dos temas abordados por ele, como estabilidade, periodicidade e comportamento genérico, se tornaram dominantes no estudo atual dos sistemas dinâmicos.

Poincaré foi o primeiro a adquirir uma visão mais global da nova mecânica (ver 'Poincaré e as raízes do acaso'). Mas essa visão suntuosa, que começou a perceber e a delinear, não foi absorvida em sua época. É significativo, por exemplo, que tenha sido indicado sucessivamente para receber o prêmio Nobel de física e isso nunca tenha ocorrido. Mas, em 1889, ganhou o prêmio estabelecido pelo rei da Suécia por seus

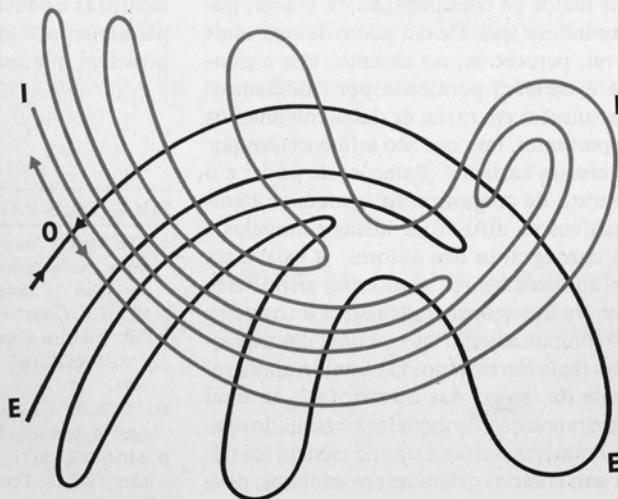
trabalhos sobre o problema dos três corpos. O matemático brasileiro Jacob Palis tem chamado a atenção para o fato interessante de que, na sua versão inicial, o trabalho de Poincaré apresentava um erro, não prevendo o aparecimento das chamadas trajetórias homoclínicas transversas, uma das fontes primárias do movimento caótico (figura 1). Dotada dessa complexidade, sem exemplos, provas ou mesmo uma visualização geométrica rudimentar que pudesse atrair outros estudiosos, escorada apenas na intuição fenomenal de seu descobridor, a questão das trajetórias homoclínicas aguardaria os trabalhos fundamentais de Birkhoff e de Smale nas décadas de 1930 e 1960, respectivamente.

Como Maxwell, Poincaré discernia com clareza que comportamentos complexos podem ocorrer mesmo em sistemas clássicos com poucas partículas e que exigiriam o uso de métodos estatísticos para sua descrição. Perceberam também as implicações físicas que a sensibilidade às condições iniciais traz para a concepção de um determinismo estrito. Poincaré levantou mesmo a franja que descobria uma nova área de estudos na matemática e na física. Mas essa percepção não prevaleceu entre seus contemporâneos e nos anos que se seguiram.

O SÉCULO XX

Embora não venhamos a considerar aqui os desenvolvimentos realizados neste século sobre o caos determinístico, é interessante se perguntar por que tanto tempo se passou antes que esse conceito se movesse da percepção de alguns cientistas para a posição de destaque que ocupa hoje em várias áreas da ciência. Uma resposta parcial, parece-me, jaz no fato de que o entendimento amplo do significado do caos determinístico exige certas precondições. Estão certamente entre elas a existência de modelos matemáticos suficientemente simples e possuidores de comportamento genérico, a identificação de áreas de aplicabilidade desses modelos em vários domínios da ciência e o uso dos computadores em grande escala no trabalho científico. Se com Poincaré parte dessas condições iniciais começavam a ser satisfeitas, o espalhar de men-

FIGURA 1. As trajetórias homoclínicas de Poincaré: "Quando se busca representar a figura formada por estas duas curvas e suas interseções em número infinito (...), estas interseções formam um tipo de tecido, de rede com malhas infinitamente emboladas... Espanta tanto a complexidade desta figura que não tento mesmo traçá-la!" (Poincaré, *Métodos novos da mecânica celeste*, vol. III, 1899.)



EXTRAÍDO DE *LE CALCUL, L'IMPRESSU - LES FIGURES DU TEMPS DE PLENER À THOM*, DE IVAR EKELAND, SEUIL, PARIS, 1984.

sagens gerais sobre a riqueza do comportamento de sistemas não-lineares ocorreu lentamente.

O interesse centrado nos comportamentos regulares abortou, também neste século, várias possibilidades de descoberta e reconhecimento de comportamentos caóticos. Alguns exemplos disso estão nos trabalhos sobre populações realizados pelos biólogos, a partir da década de 1920, ou nos trabalhos sobre oscilações não-lineares de Cartwright e Littlewood, na década de 1940. Mas o que conduziu o caos determinístico ao estado presente da arte foram justamente trabalhos teóricos nas áreas de sistemas dinâmicos, mecânica celeste, mecânica dos fluidos, oscilações não-lineares, entre outros, aliados ao uso dos computadores em simulações específicas — meteorologia, ecologia matemática, astronomia, mecânica estatística etc. — e às realizações experimentais em circuitos eletrônicos, óptica e mecânica dos fluidos.

É significativo registrar que o surgimento da teoria da relatividade e da mecânica quântica, no primeiro quartel deste século, alterou bastante a discussão filosófica predominante no final no século XIX. Embora as questões anteriormente levantadas permanecessem essenciais, elas passaram a ser vistas sob nova óptica e sob novos condicionamentos. A partir de 1910, a polêmica sobre a relatividade se desencadeia e as idéias sobre causalidade e geometria do espaço-tempo ficam na ordem do dia. A mecânica quântica, por sua vez, irá proporcionar discussões intensas, a partir de 1925, em torno da descrição probabilística como sendo essencial (ou não) para a descrição dos fenômenos físicos. Einstein e Bohr são dois expoentes da polêmica que se desdobrou por décadas e que não se esgotou. As idéias quânticas hoje predominantes atribuem ao conceito de probabilidade e aos métodos estatísticos um papel constitutivo essencial na formulação das leis físicas. Embora tenham afetado profundamente nossa concepção acerca do comportamento microfísico, essas idéias não foram utilizadas operacionalmente por outras ciências em seus modelos descritivos. O paradigma, construído em torno da mecânica clássica, permaneceu como referência básica para a descrição de processos dinâmicos.

Talvez as transformações que afetam agora a nossa visão da evolução dos sistemas não-lineares, com a possibilidade de comportamentos caóticos, venham a ter uma repercussão maior sobre esses outros domínios. O novo chacoalhar do paradigma newtoniano-laplaciano certamente trará conseqüências filosóficas importantes sobre nossa visão do mundo macroscópico. A questão de encarar a 'ordem' e a 'desordem' da natureza como manifestações dis-

tintas de um mesmo determinismo subjacente torna-se um ponto de debate acirrado.

É indispensável que se destaque o papel dos computadores em toda essa história. Sua invenção trouxe contribuição decisiva para a percepção e a geração de idéias, métodos e teorias sobre os sistemas caóticos. É muito profunda, no entanto, a sua influência. Com eles, a base material das ciências e da tecnologia e o próprio fazer científico ficam afetados. Além do aumento extraordinário da nossa capacidade computacional, a simulação ocorre hoje nos laboratórios de todos os domínios das ciências, criando uma interface entre a teoria e a experimentação. Modificações conceituais importantes são induzidas e uma nova 'intuição física' começa a emergir. Exemplifiquemos: o surgimento de novos conceitos ou sua ampliação (fractais, atratores estranhos, complexidade algorítmica, computação gráfica, inteligência artificial etc.); a utilização de modelos discretos para o espaço-tempo, em função dos procedimentos de cálculos e da organização física da memória da máquina; o debate do papel dos computadores na demonstração de teoremas matemáticos; as questões da (in)decidibilidade e da (in)completude, colocadas desde os resultados de Kurt Gödel, que assumem agora um aspecto mais amplo. Não se pode desconhecer, no entanto, a relação dialética profunda entre os conceitos, teorias e técnicas que permitem a construção da base material, no caso a máquina computacional, e o retorno conceitual possibilitado pelos novos horizontes abertos pela máquina.

Podemos afirmar que algumas das idéias mais interessantes e originais da ciência moderna estão envolvidas nesse domínio dos sistemas dinâmicos não-lineares. Isso tudo caracterizaria uma nova revolução científica, como muitos cientistas da área apreçoam e a imprensa, às vezes, veicula? O crescimento acelerado das publicações científicas, do número de novas instituições interdisciplinares, da difusão dessas idéias nos meios de comunicação de massa, parece indicar isso. De um ponto de vista mais geral, percebe-se, no entanto, que a ciência é também permeada por 'modismos' que surgem em razão de desenvolvimentos importantes, mas que são influenciados por interesses variados. Relações de poder e o aparato de comunicação tornam-se significativos na difusão de idéias e modelos e na consagração dos autores. A existência de um verdadeiro 'marketing científico', que freqüentemente ultrapassa a fronteira do comportamento ético, é uma das expressões mais claras disso. O exemplo ainda recente da 'teoria das catástrofes', na qual a extrapolação de modelos e resultados para inúmeras outras áreas da ciência foi feita sem critérios delimitativos mínimos, deve

nos resguardar contra afirmações generalistas de que tudo é 'caos' ['caotecismo'] ou de que tudo são 'fractais' ['fractologia'], ou ainda de que em qualquer movimento complicado encontram-se 'atratores estranhos'. É claro que a extensão analógica para outros domínios de conceitos e modelos criados em determinada área do conhecimento sempre foi um fator essencial para o avanço científico. Mas muitas vezes essas extrapolações terminam por gerar o dogma em contraposição a um conhecimento científico crítico. Em particular, nas áreas em que a complexidade inerente dos fenômenos analisados é muito maior do que na física, como no estudo do comportamento individual e coletivo na sociedade humana, é grande o risco de ocorrência de manipulações em nome da ciência e sob os auspícios da tecnocracia.

Só o passar do tempo poderá fornecer uma resposta mais conclusiva à questão levantada acima. E ela dependerá, obviamente, do que se entender como 'revolução científica'. A complexidade do processo histórico de construção de teorias e técnicas dificulta respostas bem demarcadas e precisas. Mas a introdução dos computadores significa um marco definitivo no desenvolvimento da ciência contemporânea. E, sem dúvida, transformações significativas estão ocorrendo no domínio genérico do 'não-linear', tanto no aspecto conceitual quanto no desenvolvimento de técnicas e instrumentos novos. A idéia recente do 'controle do caos' coloca, por exemplo, perspectivas interessantes para a construção de máquinas com comportamento altamente flexível e adaptativo e para a introdução de modelos matemáticos mais adequados à descrição dos organismos vivos.

Concluo com a afirmação vaga de que o caos é velho e é novo. Com o caos determinístico, ressurgem das cinzas o debate sempre quente do determinismo, o significado das leis da natureza e nossa capacidade de prever eventos futuros. Segundo muitos cientistas e pensadores, essas são questões permanentes e globalmente indecidíveis. É provável que assim seja.

SUGESTÕES PARA A LEITURA

1. STEWART, *Será que Deus joga dados? — A nova matemática do caos*, Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 1991.
2. GLEICK, *Caos — A criação de uma nova ciência*, Editora Campus, Rio de Janeiro, 1990.
3. LA RECHERCHE, número especial, maio de 1991.
4. M. TABOR, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*, John Wiley, New York, 1989.
5. B. MANDELBRÖT, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman, New York, 1983.

A PESQUISA TUTELADA
João Pacheco de Oliveira Filho

ANATOMIA DA MADEIRA
Pedro L. B. Lisboa

CENÁRIOS DA AMAZÔNIA
Superintendência do Desenvolvimento da Amazônia

CHUVAS E CONSTELAÇÕES: CALENDÁRIO ECONÔMICO DOS ÍNDIOS DESÂNA
Berta G. Ribeiro e Tolamã Kenhíri

INPA: RESISTIR FOI PRECISO
Vera Maria F. de Almeida e Val

LITERATURA ORAL INDÍGENA: O EXEMPLO DESÂNA
Berta G. Ribeiro

MANEJE COM CUIDADO: FRÁGIL
Cleber J. R. Alho

O DRAMA DOS YANOMAMI
Maria Manuela Carneiro da Cunha

O GIGANTE DAS ÁGUAS DOÇES
Roberto Huet de Salvo Souza e Adalberto Luís Val

O PINCEL MÁGICO DE MARGARET MEE
Alicia Ivanissevich

ORQUÍDEAS: ENTRADA E DISPERSÃO NA AMAZÔNIA
Pedro Ivo Soares Braga

PERDENDO RONDÔNIA
Pedro Luiz Braga Lisboa, Ubirajara N. Maciel e Ghilleen T. Prance

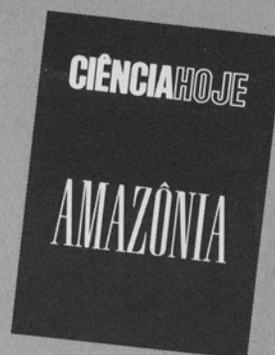
POLÍTICA INDIGENISTA E ASSISTÊNCIA À SAÚDE
Dina Czeresnia Costa

PUPUNHA: UMA ÁRVORE DOMESTICADA
Charles R. Clement

QUEIMADA: O CORTE QUE ATRAI
Christopher Uhl e Robert Buschbacher

REFLORESTAMENTO INDÍGENA
Anthony B. Anderson e Darrell A. Posey

RESERVE JÁ O SEU EXEMPLAR



Agora você pode ter reunidos alguns dos mais importantes artigos publicados pela *Ciência Hoje* sobre a região amazônica. Todos eles escritos por renomados pesquisadores. São 160 páginas coloridas em papel couché e capa plastificada.

Você pode adquirir esse acervo único em condições especiais. Receba o exemplar em sua casa. Aproveite para presentear quem você gosta. Não perca essa chance.

1º VOLUME ESPECIAL

AMAZÔNIA

RONDÔNIA: ESTRADAS QUE LEVAM À DEVASTAÇÃO
Phillip Martin Fearnside

SELEÇÃO PREDATÓRIA
Christopher Uhl e Ima Célia Guimarães Vieira

UM DESAFIO PARA O FUTURO
Kenton Miller

UM PIGMENTO NAS ÁGUAS NEGRAS
Luiz Renato Caldas

UMA RESERVA BIOLÓGICA PARA O MARANHÃO
David Conway Oren

VIOLACEÍNA: A DESCOBERTA DE UM ANTIBIÓTICO
Nelson Duran

XAMANISMO E MEDICINA: O 'CASO RUSCHI' REAVALIADO
Renato Barbosa Rodrigues Pereira

Envie hoje mesmo seu pedido, acompanhado de cheque ou vale postal nominal à:

CIÊNCIA HOJE

Av. Venceslau Brás, 71 - fundos/casa 27
22290 Rio de Janeiro RJ
Tel: (021) 295-4846 Fax: (021) 541-5342

Até 25 de maio, o preço é Cr\$ 30.000,00

O FRÁGIL EQU



LÍBRIO DA VIDA

Robert M. May

Departamento de Zoologia, Universidade de Oxford

Uma das coisas mais inesquecíveis que já vi num museu está no Smithsonian Museum of Natural History, em Washington, D.C.: uma cozinha em que o chão, o teto, os armários estão totalmente forrados com os milhares de baratas que seriam geradas por uma única fêmea média, se toda a sua prole sobrevivesse. Temos aí uma ilustração impressionante de um dos princípios básicos da evolução darwiniana: todos os animais têm a capacidade intrínseca de se reproduzir além do necessário para a manutenção de sua população, isto é, podem se multiplicar indefinidamente de geração em geração. A ação de um sem-número de fatores, porém — predação, suprimentos limitados de alimento, doença etc. —, restringe esse crescimento, mantendo as populações sob controle a maior parte do tempo.

O resultado é que, em sua maioria, as populações de plantas e animais tendem a crescer após flutuarem até densidades muito baixas (nessas circunstâncias a capacidade intrínseca de crescimento tem maior probabilidade de se exercer), e tendem a diminuir após atingirem densidade muito elevadas.

Um dos principais objetivos da pesquisa em ecologia é descobrir quais são exatamente os efeitos 'dependentes da densidade' que tendem a regular o tamanho das populações. Essa compreensão, que é de importância fundamental, tem também aplicação prática na tentativa de prever os efeitos prováveis de tipos específicos de alterações de determinadas populações, sejam elas naturais ou produzidas pelo homem.

Até pouco tempo atrás, a maioria dos ecologistas partia do pressuposto implícito de que os fatores regulatórios dependentes da densidade tendiam, por si mesmos, a manter uma população em certa densidade constante. Assim, atribuíam as flutuações irregulares que se observam em tantas populações naturais a alterações imprevisíveis de variáveis ambientais relevantes. A tarefa dos ecologistas seria, portanto, tentar extrair um sinal constante da camada de ruído ambiental que o camufla.

No início da década de 1970, porém, George Oster, da Universidade de Berkeley, Jim Yorke, da Universidade de Maryland, eu mesmo e outros começamos a observar mais detidamente as equações propostas por ictiólogos e entomologistas como descrições deliberadamente simplificadas de mecanismos dependentes da densidade.

Descobrimos então que essas equações exibem um conjunto de comportamentos dinâmicos impressionante, mais rico do que os biólogos supunham até então.

Considere, especificamente, a equação $x_{t+1} = \lambda x_t (1 - x_t)$. Aqui, x_t pode representar, por exemplo, a população de um inseto com gerações discretas, que não se superpõem, na geração t . Suponha que cada adulto da geração t produza uma descendência λ , na ausência de efeitos de superpopulação. Nesse caso, a população na geração seguinte, x_{t+1} , seria λx_t . O fator adicional $(1 - x_t)$ representa efeitos de *feedback* dependentes da densidade, estando a densidade populacional ajustada de modo que, acima de um nível de superpopulação ' $x = 1$ ', a população se extingue (valores negativos correspondem à extinção).

Em consequência desses estudos, voltados para a ecologia, essa equação passou

para o centro do palco em muitas áreas das ciências, no início dos anos 1970.

Para λ menor que 1, a população decresce para zero (pela razão óbvia de que sua taxa de reprodução está abaixo da unidade). Para λ maior que 1, mas menor que 3, a população tende ao valor constante que a intuição sugere. Um aumento maior de λ resulta numa crescente tendência da população a 'explodir', quando em baixa densidade. Numa tendência correspondente a 'implodir', quando em alta densidade; na equação modelo, essa tendência crescente a 'explodir e implodir' aparece como *feedback* positivo (como os zumbidos de um microfone quando a amplificação está muito alta) e a população oscila num ciclo de duas gerações, alternando entre um valor alto e um baixo. À medida que λ continua a crescer além de 3, esses ciclos se tornam mais complexos e o período se estende (em

sucessivas duplicações) para 4 gerações, depois 8, depois 16 e assim por diante. Enquanto isso, porém, a população continua a alternar entre alto e baixo em sucessivas gerações. Finalmente, quando λ excede um número por volta de 3,57, aparece um domínio de flutuações aparentemente aleatórias: o 'caos'.

Nesse domínio, a partir de cerca de 3,57, a regra iterativa simples $x_{t+1} = \lambda x_t (1 - x_t)$ gera valores de população que parecem, em tudo e por tudo, amostras de um processo aleatório. Esse espectro de possibilidades, de pontos estáveis até o caos, passando por ciclos estáveis, está resumido na figura 1.

Para os biólogos que estudam populações, a primeira mensagem de tudo isso é que os sinais obtidos de processos puramente determinísticos de regulação dependentes da densidade podem ter a aparência de ruído aleatório, randômico. E, o que é mais desconcertante ainda, podemos ver que, no regime caótico, valores iniciais de x arbitrariamente próximos acabam por levar a trajetórias completamente diferentes (figura 2). Isto é, quando as dinâmicas são caóticas, a sensibilidade a condições iniciais é tão grande que previsões a longo prazo se tornam praticamente impossíveis (mesmo que tenhamos uma regra simples e determinística em que baseá-las).

Por que essas propriedades de uma equação tão simples não foram reconhecidas mais cedo? De fato, o leitor só precisará de uma calculadora de bolso para checar as afirmações feitas acima: basta iterar a equação. Na verdade, ela é tão simples que teria sido possível estudá-la numericamente muito antes do surgimento de computadores velozes — aliás, o trabalho feito nos anos 70, que definiu a importância dessa equação e de outras similares para ecologistas e estudiosos de outras áreas, foi mais analítico que numérico.

Vários matemáticos, dos quais o primeiro parece ter sido Finn Myrberg (no final

dos anos 50), tinham destrinchado as propriedades matemáticas dessa equação, mas, ao que parece, não perceberam as implicações mais amplas de seus achados. Por outro lado, vários ecologistas (como William Ricker, especialista em pesca da Universidade da Colúmbia Britânica, no Canadá, e P. A. P. Moran, entomologista da Universidade Nacional da Austrália) tinham também examinado a equação; tinham até encontrado caos em estudos numéricos, mas, como estavam à procura de soluções constantes, assim que as encontraram esqueceram o resto.

Que teria acontecido no início dos anos 70 para tornar esse tipo de equação de diferença finita e de primeiro grau em um dos dois fios (o outro foi o modelo de Lorenz, voltado para a meteorologia) que conduziram ao caos como uma nova disciplina? A meu ver, foi o fato de que pessoas com suficiente conhecimento de matemática para compreender essas equações passaram a considerá-las em contextos práticos, de modo que suas implicações mais amplas puderam ser percebidas.

IMPLICAÇÕES PARA A BIOLOGIA DAS POPULAÇÕES

Para estudar populações biológicas, cuja dinâmica tenha alguma semelhança com aquelas descritas por equações determinísticas, precisamos trazê-las para o laboratório. Só assim podemos manter as variáveis ambientais sob controle e eliminar os efeitos complicadores das interações com outras populações. O resultado disso é artificial: temos uma espécie de 'computador vivo', com propriedades que me parecem interessantes, mas que talvez não forneçam uma visão adequada do modo como as populações se comportam na natureza (onde as interações com outras espécies e/ou flutuações ambientais podem ser aspectos importantes da dinâmica).

Foram feitos alguns estudos desse tipo em laboratório usando seres relativamente pequenos — como rotíferos, dâfnias ou moscas-varejeiras —, que, além da vantagem de não ocuparem muito espaço, apresentam uma sucessão bastante rápida de gerações. Aumentando a temperatura, por exemplo, o pesquisador pode acelerar processos metabólicos, com o efeito final de que a curva de crescimento da população se torna mais acentuadamente marcada pela 'explosão e implosão'. Esses estudos mostraram, de fato, a esperada transição da constância para 'altos e baixos' regulares dos ciclos de população e, comprovadamente, para o caos em laboratório. Mesmo nessas condições, entretanto, não se consegue captar aquelas duplicações muito nítidas de período e outros fenômenos que tornam os experimentos correspondentes com sistemas físicos tão fascinantes.

No mundo natural, a tarefa de investigar sinais dependentes da densidade do ruído ambiental que o recobre já é bastante difícil quando as dinâmicas subjacentes são constantes. As complicações adicionais que podem surgir quando o próprio sinal é caótico ainda não são claras. Um método poderoso para explorar essas questões consiste em usar um computador para criar conjuntos de 'pseudodados' artificiais. Com isso, podemos representar o tamanho da população, geração por geração, num mundo imaginário em que todos os fatores que governam esse tamanho são especificados pelo pesquisador. Esses pseudodados podem ser analisados pelos métodos convencionalmente aplicados aos dados reais, obtidos no campo, e checar sua eficácia, verificando se desvendam os mecanismos que foram introduzidos deliberadamente no mundo imaginário (ver 'Um mundo criado no computador').

Além do ruído ambiental, outro tipo de complicação reside no fato de que os mecanismos básicos que regulam a população

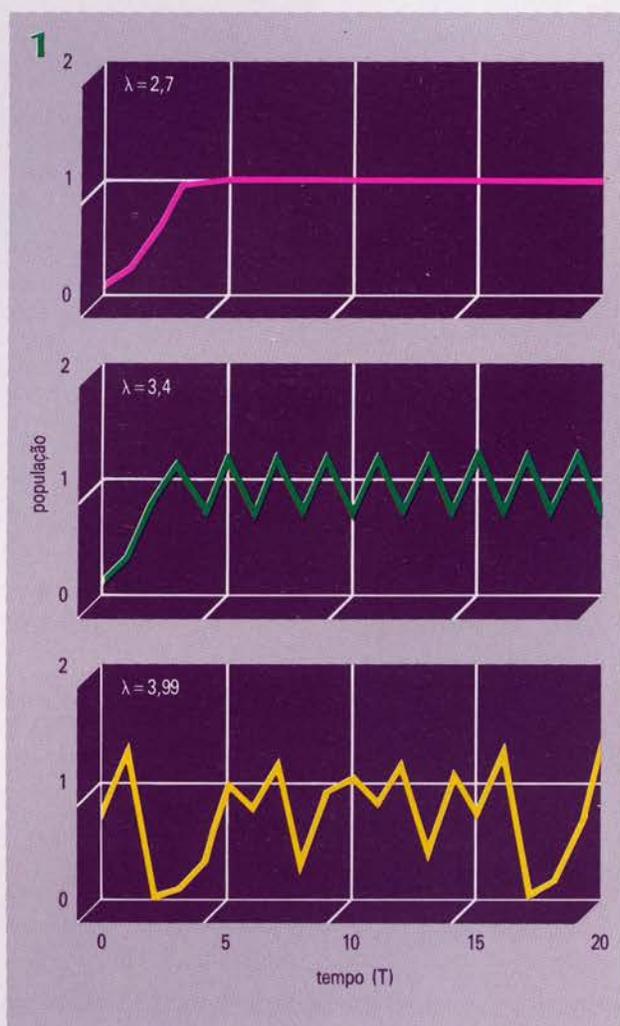


FIGURA 1. Espectro de resultados possíveis da equação $x_{t+1} = \lambda x_t (1 - x_t)$, segundo os valores de λ : pontos estáveis, ciclos estáveis e, a partir de 3,57, o caos.

particular que estamos estudando envolvem geralmente interações com outras espécies, cujas densidades populacionais são, por sua vez, afetadas por interações com nossa população alvo e com outras. É muito provável que essas redes de interações tornem as dinâmicas caóticas mais prováveis, como Oster e eu fomos os primeiros a assinalar, em 1976.

As séries temporais — isto é, seqüências de valores obtidos por mensurações feitas a intervalos de tempo regulares — de que dispomos sobre os efetivos de populações particulares são poucas e pobres. E, se forem de fato uma trajetória caótica para uma variável num sistema de equações n -dimensional (para n espécies em interação), a tarefa de elucidar seus mecanismos básicos pode ser assustadora.

Diante desse problema, William Schaffer, da Universidade do Arizona, Mark Kot, da Universidade do Tennessee, e outros mostraram ser possível usar técnicas fenomenológicas para verificar se nossas séries temporais de dados representam o ruído determinístico gerado por algum 'atrator estranho', ou se os dados são apenas ruído banal, sem significado. O objetivo dessas técnicas, baseadas em trabalhos com sistemas físicos, é compreender o caráter da dinâmica — e, assim, chegar a uma previsão a curto prazo —, mesmo sem compreender os mecanismos e interações biológicas que estão realmente em jogo.

Suponhamos que há de fato um atrator n -dimensional subjacente a uma série temporal — em que, à primeira vista, só se percebe ruído — de valores populacionais, $x(t)$, para a espécie que estamos estudando. Podemos então reconstruir esse atra-

tor estranho — ignorando os mecanismos biológicos fundamentais que o geram —, escolhendo algum intervalo fixo de tempo, T , e plotando os valores das variáveis $x(t)$, $x(t - T)$, $x(t - 2T)$, ... , $x(t - [m - 1] T)$ num espaço m -dimensional. Por este processo — que ainda combina muito de arte com a ciência — podemos ver o atrator 'entrar no foco', por assim dizer, em m dimensões. A 'dimensão de imersão', m , é escolhida de tal modo que o aumento do seu valor por unidade não produza, aparentemente, nenhuma estrutura adicional (e o processo em geral não é afetado se o valor do intervalo de tempo, T , se altera numa margem bastante ampla).

Por volta de 1985, Schaffer e Kot adotaram essa abordagem para estudar a série temporal que representava o número de casos de sarampo recenseados mês a mês na cidade de Nova York de 1928 a 1963 (ano em que a vacinação começou a alterar a dinâmica da doença). O resultado foi um atrator imerso, num espaço de três dimensões. Quando se traçam as chamadas seções de Poincaré, ou planos que cortam o atrator tridimensional, vêem-se indícios de que as dinâmicas correspondem ao caos determinístico gerado por um mapeamento ou equação aproximadamente unidimensional.

Outras análises desses e de outros dados sobre sarampo, registrados em Copenhague, usam técnicas como a computação de expoentes de Liapunov, ou a estimativa direta da dimensão de um atrator pelo método Grassberger-Procaccia. Em todos os casos, o que se conclui é que a melhor explicação para os dados é que foram gerados por caos determinístico, embora essas

séries sejam muito curtas (a maior delas, registrada em Nova York, abrange cerca de 500 valores mensais) para permitir uma análise confiável por essas técnicas, que requerem grande quantidade de dados.

G. Sugihara e eu propusemos recentemente uma abordagem mais simples e um pouco menos exigente de dados, para distinguir o caos determinístico do ruído. Nessa abordagem, a pedra de toque é a previsão. A série em questão é dividida em duas metades, sendo a primeira considerada um passado 'conhecido', que serve para prever a segunda, considerada um futuro 'desconhecido' (ver 'Caos ou ruído?').

Toda essa abordagem, com sua ênfase na tentativa de encontrar uma assinatura característica, que distinga séries temporais caóticas daquelas em que a flutuação resulta de ruído experimental ou de erro de amostragem, está em sua infância na biologia das populações. Mesmo quando bem-sucedidos, esses métodos só nos informam que há alguns mecanismos não-lineares, dependentes da densidade, em operação. Não nos dizem, porém, que mecanismos são esses. Para alguns ecologistas, isso lembra magia negra. De minha parte, porém, estou convencido de que a abordagem é útil, por indicar quando a busca de tais mecanismos pode ser proveitosa e por possibilitar a previsão a curto prazo a partir de dados que parecem não ser mais que ruído.

Basta olharmos à nossa volta na rua para constatar que há muita variabilidade morfológica na população humana. Nos últimos 20 anos, mais ou menos, os estudos da biologia molecular dos genes mostraram que essa variabilidade morfológica vai de par com um assombroso grau de variabilidade entre espécimes ou genótipos de animais e plantas no nível das seqüências de aminoácidos em regiões codificantes e não codificantes das moléculas de ácido desoxirribonucléico (ADN). Como tamanha variabilidade pôde ser gerada e mantida?

Um mecanismo capaz de manter tal variabilidade, ou polimorfismo, é a seleção natural, que depende da abundância relativa (dependente da freqüência) ou absoluta (dependente da densidade) de um genótipo na população total de uma espécie. Há muitos fatores ecológicos que podem levar a essa seleção dependente da freqüência ou da densidade.

Especialmente importantes, como Haldane foi o primeiro a frisar, em 1949, são os efeitos das doenças infecciosas, que em geral se espalham mais facilmente quanto maior for a densidade dos hospedeiros. Diferentes genótipos de hospedeiros podem ter diferentes graus de resistência a diferentes variedades de um agente patógeno. Nesse caso, os genótipos raros num determinado momento provavelmente gozarão de uma vantagem seletiva (porque as doenças infeccio-

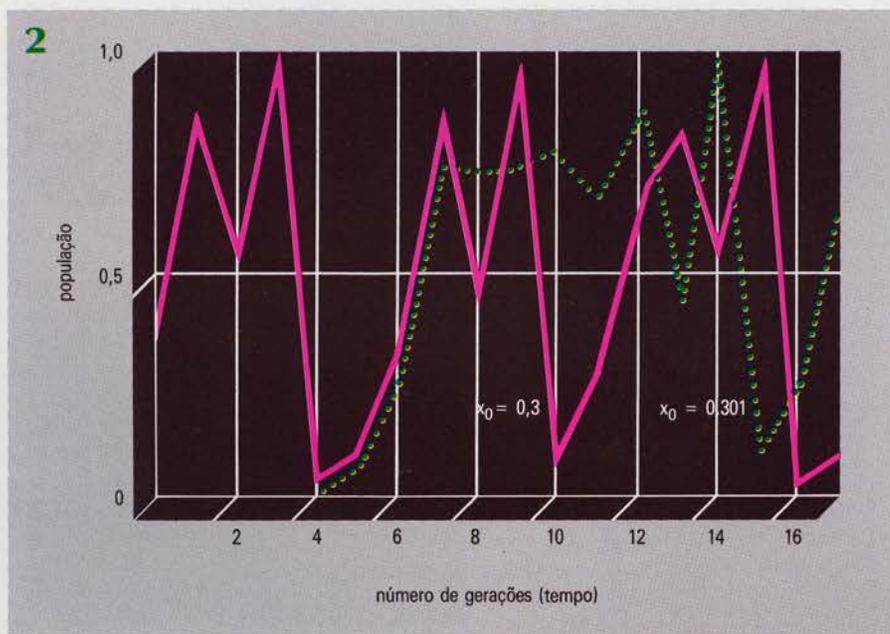


FIGURA 2. No regime caótico, dada à grande sensibilidade, condições iniciais (valores iniciais de x) arbitrariamente próximas levam a trajetórias muito diferentes.

UM MUNDO CRIADO NO COMPUTADOR

O método da criação de um modelo no computador, com o uso de pseudodados, foi utilizado por Michael Hassell, do Imperial College, de Londres, que aplica regras que resumem suas idéias sobre os fatores que influenciam certas populações de insetos. Em seus modelos de computador, insetos adultos são distribuídos — segundo regras, mas com alguns elementos aleatórios — em vários sítios em cada geração. Esses adultos põem ovos e a probabilidade de sobrevivência da larva depende da densidade desta em cada sítio. Esse é o fator essencial dependente da densidade.

As larvas sobreviventes tornam-se adultas, se dispersam e se redistribuem entre os sítios, para reiniciar todo o processo na geração seguinte. A figura 3a mostra um conjunto desses pseudodados para a população total, geração por geração. Nesse exemplo, as flutuações resultam em parte de elementos randômicos no processo de dispersão (que imitam uma situação natural) e, em parte, do caos determinístico resultante de efeitos dependentes da densidade em sítios de alta densidade.

A figura 3b mostra uma análise, chamada 'fator k' desses dados, feita segundo o processo convencional pelo qual o logaritmo da razão de sucessivas densidades populacionais é confrontado com o logaritmo da densidade populacional na geração anterior ($\log [x_{t+1}/x_t]$ contra $\log x_t$). Nessa figura, o aspecto da curva significa, essencialmente, que a dependência subjacente da sobrevivência das larvas em relação à densidade foi posta em evidência.

A figura 4a repete esse exercício, mas com uma diferença: neste caso, o único componente aleatório é o que se introduz através das flutuações no número de ovos postos por cada adulto (mais uma vez, a magnitude dessas flutuações acompanha a de exemplos reais). Como no caso anterior, as flutuações no tamanho da população decorrem em parte da aleatoriedade e em outra, do caos determinístico.

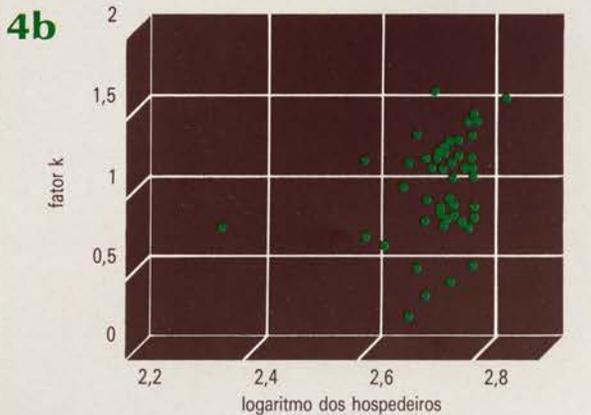
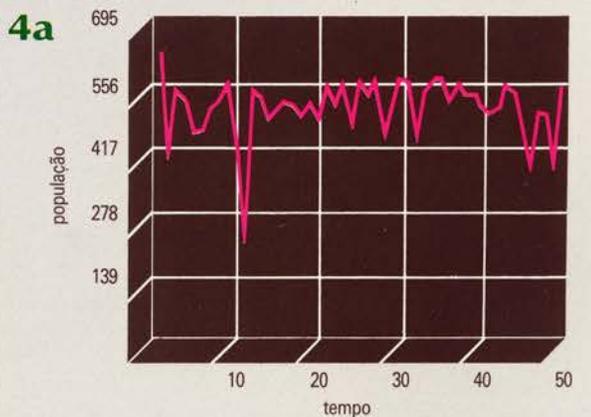
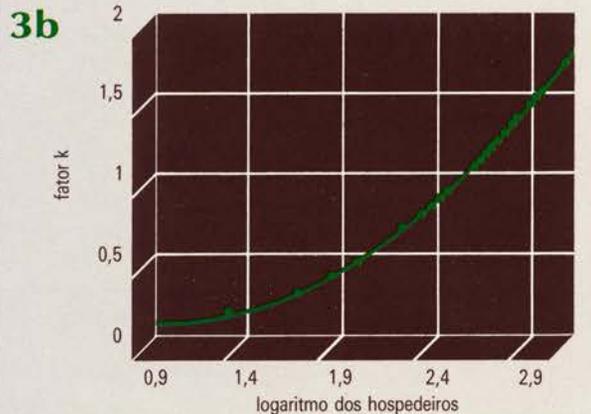
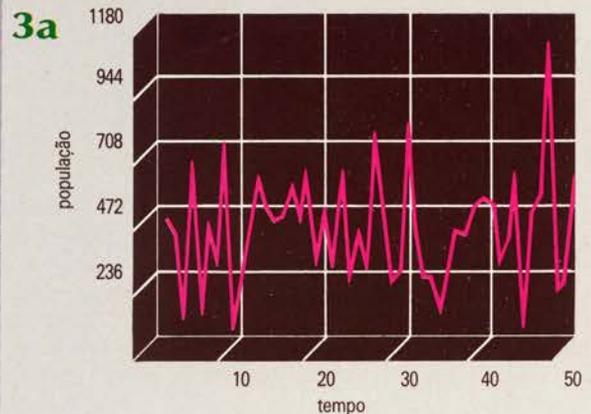
Ocorre, porém, que, quando se aplicam os métodos convencionais a esses pseudodados, como se vê na figura 4b, não se consegue discernir sinal algum. Embora Hassell saiba perfeitamente o que governa esse mundo — afinal, ele o construiu —, as técnicas-padrão são incapazes de desvendar esses mecanismos.

O problema básico envolvido nisso é que, uma vez que a heterogeneidade espacial, o ruído ambiental e as dinâmicas caóticas resultam de relações fortemente não-lineares, todas embaralhadas, pode ser difícil demarcar sinais dependentes da densidade do ruído que se misturam a ele. Parte do problema é que, nessas situações não-lineares, podemos chegar a conclusões falsas se buscarmos a média entre os vários sítios para depois estudar a dinâmica. É preciso, ao contrário, estudar primeiro a dinâmica, sítio por sítio, e só depois calcular a média.

Esta história, infelizmente, não termina num clímax. Em biologia, dinâmicas caóticas podem criar dificuldades que ainda não foram plenamente compreendidas e que podem vir a exigir estudos muito mais detalhados que os que se costumava fazer no passado. Enquanto isso, essas complicações ajudam a entender por que — embora tenham ajudado a lançar o caos como disciplina no início dos anos 70 — os biólogos especialistas em populações forneceram tão poucos dos elegantes exemplos que figuram no catálogo cada vez mais rico dos fenômenos caóticos.

FIGURA 3. Em 3a, vemos um conjunto de pseudodados para uma população, geração por geração; as flutuações resultam em parte de elementos aleatórios no processo de dispersão. Em 3b, a análise do 'fator k' desses dados. O aspecto da curva significa que a dependência subjacente da sobrevivência das larvas em relação à densidade foi evidenciada.

FIGURA 4. Em 4a, novo conjunto de pseudodados. Desta vez, o único componente aleatório são flutuações no número de ovos postos para cada adulto. Em 4b, vemos que, pela aplicação de métodos convencionais a esses dados, não diferenciamos nenhum sinal.



sas que os atingirem se disseminarão em menor grau, ou não se disseminarão, em decorrência de sua baixa densidade).

As análises convencionais que a genética populacional fazia até recentemente dessas forças seletivas dependentes da densidade mostravam que elas de fato geravam polimorfismos, mas tendia-se a pressupor que estes eram constantes, mantendo-se em certas proporções fixas entre os genótipos dos hospedeiros. Entretanto, estudos das propriedades dinâmicas das associações hospedeiros-patógenos — feitos por W. D. Hamilton, da Universidade de Oxford, Simon Levin e David Pimentel, da Universidade de Cornell, Roy Anderson, do Imperial College de Londres e por mim — mostram que, provavelmente, polimorfismos caóticos são a regra e não a exceção. Por enquanto, temos pouca investigação experimental desses sistemas ao longo do tempo, mas estudos sobre variedades de malária em populações humanas na Nova Guiné, em diferentes aldeias ou numa mesma aldeia ao longo do tempo (desenvolvidos por Karen Forsythe, do Walter and Eliza Hall Institute, Melbourne), e sobre distribuição de plantas (feitos pelo australiano Jeremy Burdon, da Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization), fornecem pistas enigmáticas de mudanças caóticas nas frequências genéticas.

O que está claro é que os tipos de mecanismos seletivos dependentes da frequência e da densidade, que há muito sabemos serem capazes de manter a diversidade genética no seio das populações, com frequência podem manter essa diversidade não num nível constante, mas em níveis que fluem caoticamente. Faz-se muito alarde, hoje, sobre o fato de que começamos a sequenciar o que se tem chamado de o genoma humano. Igualmente fascinantes, porém — como os biólogos evolucionistas admitiram desde o início —, serão os avanços em nossa compreensão quantitativa da variabilidade e do polimorfismo presentes entre os genomas humanos. Talvez o caos venha a acrescentar uma dimensão extra a essa aventura.

IMPLICAÇÕES EM OUTRAS ÁREAS DA BIOLOGIA

Dado o grande número de fatores biológicos e ambientais que podem influenciar a dinâmica e a genética das populações naturais, é razoável esperar que os exemplos mais inequívocos de dinâmica caótica serão encontrados em nível suborgânico, isto é, em processos fisiológicos ou neurobiológicos.

Leon Glass e Michael Mackey, da Universidade McGill (Canadá), foram dos primeiros a explorar a possibilidade de que

muitos problemas médicos seriam o que chamam de doenças dinâmicas, isto é, doenças produzidas por mudanças em variáveis fisiológicas que levam processos normalmente rítmicos a exibir flutuações erráticas ou caóticas.

Um caso que estudaram foi o da respiração Cheynes-Stokes, que consiste numa aceleração e lentificação irregulares da respiração que frequentemente se segue a acidentes cardíacos congestivos. Glass e Mackey mostraram que um modelo matemático simples, mas razoável, da circulação de CO₂ no curso do processo respiratório, pode produzir tanto soluções periódicas regulares como soluções caoticamente irregulares, dependendo dos valores dos parâmetros que caracterizam o ciclo CO₂. Estimativas plausíveis dos parâmetros relevantes sugerem que não é necessária uma mudança muito expressiva das taxas de fluxo arterial ou de outros parâmetros para ocasionar a passagem do estado periódico para o caótico.

Colapsos dos ritmos cardíacos são candidatos óbvios a 'doenças dinâmicas'. Os melhores estudos sobre batimentos cardíacos foram feitos *in vitro*. Glass e colaboradores mostraram que um grupo de células cardíacas de embriões de galinha bate espontaneamente num ritmo inato e regular. Quando um forte campo elétrico é aplicado a esse agregado de células, a fase do batimento cardíaco se reajusta, isto é, o batimento seguinte se dará mais cedo ou mais tarde que o normal. Após uma série periódica de aplicação desses impulsos elétricos, o agregado de células cardíacas passa a ser impelido por duas forças com diferentes períodos: uma com o ritmo intrínseco a elas, outra com o ritmo dos choques elétricos. Os batimentos cardíacos que se produzem dependem da relação entre esses dois períodos. Em alguns casos, as células cardíacas entram em ressonância com algum harmônico do estímulo, isto é, batem uma vez ou duas a cada choque, ou três vezes para dois choques, e assim por diante. Outras vezes, as células se contraem ao acaso e produzem padrões irregulares ou caóticos.

Esses estudos mostraram também que a dinâmica desses padrões, periódicos ou caóticos, pode ser compreendida em termos das bifurcações complexas que resultam da interação entre os ritmos inatos das células cardíacas e a frequência do estímulo elétrico imposto. Esses estudos experimentais mostram que é possível induzir e compreender o caos num sistema artificial, que é uma metáfora dos processos cardíacos. Entretanto, a aplicação detalhada dessas idéias a arritmias cardíacas, ou a padrões eletrocardiográficos antes e depois de ataques cardíacos, está apenas se iniciando.

A neurofisiologia oferece uma ampla gama de oscilações anormais e ritmos com-

plexos que suscitam problemas terapêuticos e que são candidatos ao título de 'doenças dinâmicas'. Por vezes, há uma oscilação acentuada num sistema de controle neurológico que normalmente não se caracteriza por um processo rítmico. Exemplos disso são distúrbios do movimento (os tremores da doença de Parkinson, por exemplo) e as oscilações paroxísticas (intensas) anormais na descarga de neurônios que ocorrem em muitas convulsões. Outras vezes, acontecem mudanças qualitativas nas oscilações de processos já rítmicos. É o caso das anomalias da marcha, das alterações dos ciclos de sono-vigília, ou de doenças maniaco-depressivas com rápida alternância de ciclos. Por fim, manifestações clínicas podem ocorrer de modo aparentemente aleatório, como as crises epiléticas dos adultos. Os processos neurológicos mostram tal complexidade, que não é fácil ver como seria possível desenvolver, testar e compreender modelos para essas doenças dinâmicas, se é que de fato o são.

Mesmo assim, fazem-se tentativas. Uma delas é a de Paul Rapp, da Universidade da Pennsylvania, que se baseia na caracterização da complexidade dinâmica de séries temporais de eletroencefalogramas (EEG) que registram os padrões da atividade cerebral de adultos humanos, enquanto executam várias tarefas. Rapp verificou que a complexidade dos padrões da atividade elétrica cerebral muda em resposta a mudanças na atividade cognitiva.

Num experimento típico, os sujeitos foram solicitados a contar de trás para frente, a começar de 700, de sete em sete. Rapp caracterizou a alteração da complexidade dos padrões eletroencefalográficos resultantes computando a dimensão fractal das séries temporais irregulares que obteve, e descobriu que a dimensão passava de seu valor de base (cerca de 2,3) para 2,9 durante os testes. Sua conclusão foi que os padrões de EEG mais complicados, de maior dimensão fractal, correspondem a estados mentais mais alertas.

Para estabelecer uma conexão clara entre os processos neurofisiológicos e seu caráter dinâmico — pontos estáveis, ciclos ou caos — precisamos criar situações artificiais controladas, relativamente simples. Um sistema que se presta a esse tipo de manipulação experimental é o reflexo de acomodação à luz da pupila do olho. Esse reflexo é essencialmente um mecanismo de controle neuronal, com um *feedback* negativo atrasado, que regula a quantidade de luz que atinge a retina pela alteração da área da pupila (quando a luz é mais intensa a pupila se contrai e vice-versa, como se pode observar, facilmente, brincando com uma lanterna diante de um espelho).

Em laboratório, esse reflexo pode ser reproduzido e controlado focalizando-se no

CAOS OU RUÍDO?

O método proposto por Sugihara e por mim para distinguir o caos determinístico do ruído que a ele se soma consiste em usar a primeira metade de uma série temporal de dados para compilar uma 'biblioteca' de padrões passados, que é então usada para prever a segunda. Cada padrão na biblioteca é um ponto num espaço m -dimensional, isto é, cada um deles é definido operacionalmente como uma seqüência de m valores $(x(t), x(t - T), \dots, x(t - [m - 1]T))$.

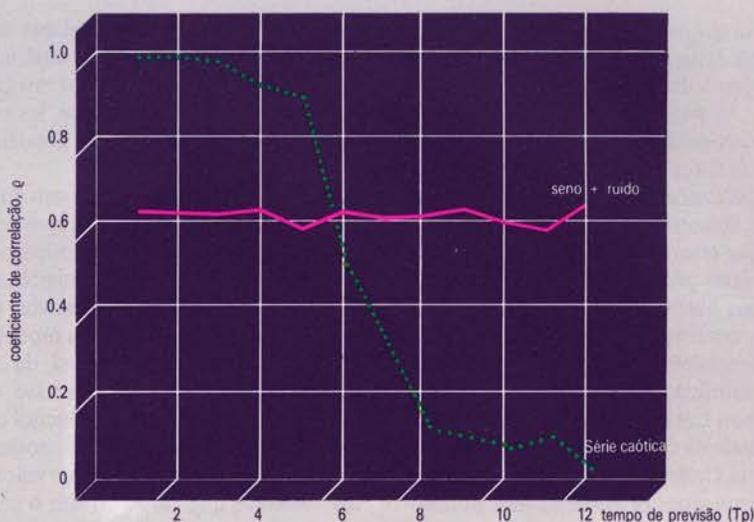
Com base nessa biblioteca assim construída, fazemos então previsões referentes à segunda metade dos dados. Para cada ponto da segunda metade da seqüência, $x(\tau)$, reconstruímos o padrão que o precede imediatamente (o ponto m -dimensional $(x(\tau), x(\tau - T), \dots, x(\tau - [m - 1]T))$) e, então, procuramos os padrões passados mais semelhantes (os pontos m -dimensionais da biblioteca que mais se aproximam do ponto em questão).

Para fazer uma previsão para p intervalos de tempo à frente, procuramos ver o que aconteceu com os padrões similares no passado, ou seja, escolhemos na biblioteca o conjunto (ou, em linguagem mais técnica, o simplex) de $m + 1$ pontos vizinhos que contém o ponto desejado no espaço m -dimensional a ser previsto, localizamos onde esse conjunto se situa no espaço m -dimensional, p intervalos de tempo mais tarde, e usamos seu baricentro como a base de nossa previsão.

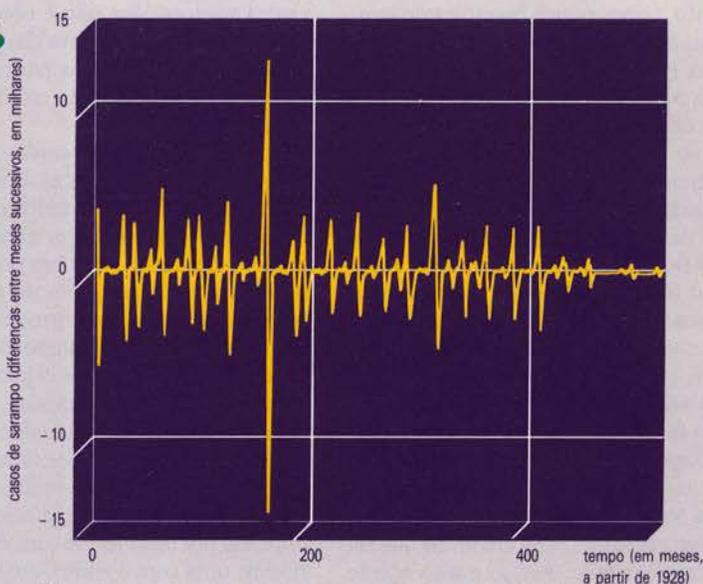
Assim, fazemos previsões para cada ponto da segunda metade da série temporal, projetando 1, 2, 3, ..., p intervalos de tempo no futuro. Essas previsões teóricas podem ser comparadas com o que efetivamente aconteceu p intervalos de tempo à frente, para cada ponto da segunda metade da série temporal. Finalmente, pode-se calcular o coeficiente de correlação estatística entre os resultados previstos e observados desse conjunto de previsões, como uma função dos números de intervalos, p , à frente em que a previsão é feita.

Na figura 5, a linha pontilhada mostra o resultado dessa análise para uma série temporal puramente caótica de mil valores, gerada pelo mapeamento quadrático discutido acima com $\lambda = 4$. A correlação entre os valores previstos e observados da segunda metade da série (com previsões baseadas na biblioteca de padrões compilada da primeira metade, com $m = 3$) é alta nas previsões para um ou dois intervalos à frente, mas vai decrescendo à medida que o intervalo da previsão aumenta. Isto é exatamente o que se espera de uma seqüência gerada por um atrator caótico.

5



6



7

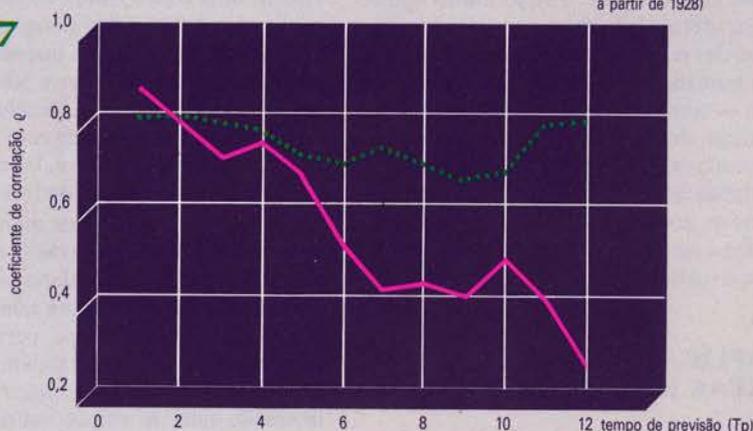


FIGURA 5. A linha pontilhada mostra que a correlação entre os valores previstos e observados da segunda metade da série é alta em um ou dois intervalos à frente, mas decresce à medida que o intervalo da previsão aumenta, como se espera de uma seqüência gerada por um atrator caótico.

A linha cheia mostra o que se obtém quando o processo é aplicado a uma série de tempo gerada por uma curva senoidal acrescida de um ruído randômico (com metade da amplitude da curva senoidal).

FIGURA 6. Variação mês a mês do número de casos de sarampo em Nova York a partir de 1928.

FIGURA 7. A aplicação do método de Sugihara e May aos dados sobre o sarampo em Nova York revela o tipo de queda que ocorre com o aumento de p característico do caos determinístico, expressa na linha cheia. Já com os dados relativos à catapora na mesma cidade, obtêm-se uma relação direta p versus q , expressa na linha pontilhada, mais parecida com o tipo 'curva senoidal mais 50% de ruído' da figura 5.

Por outro lado, a linha cheia na figura 5 mostra o mesmo processo aplicado a uma série de tempo gerada por uma curva senoidal acrescida de um ruído randômico (com metade da amplitude da curva senoidal). Nesse caso, o método revela prontamente a relação de curva senoidal: prevê 2/3 da magnitude de pontos posteriores na série, mas o 1/3 restante provém de ruído de fato aleatório, que é igualmente imprevisível se o número de intervalos de tempo à frente for 1 ou 10.

A mesma figura 5 permite também uma interessante percepção da diferença entre caos determinístico e a 'aleatoriedade real' de uma roleta. No caso da roleta, se compararmos uma seqüência comum de números — como 17, 26, 15, 0, 32 — como padrões ocorridos no passado, ficaremos tão capazes (ou incapazes) de prever em que número a roda vai parar na próxima jogada quanto em dez jogadas à frente: em todos os casos, qualquer número dado aparecerá com a probabilidade de 1/37. Nesse caso, a completa dependência entre a correlação e o intervalo da previsão é tal como aparece na figura. Por outro lado, para uma seqüência aparentemente randômica gerada por algum sistema determinístico de equações, mas caótico, padrões passados permitirão previsões que serão precisas a curto prazo, mas não a longo prazo. A taxa em que a correlação, ρ , entre previsões e observações decresce com o aumento do intervalo de previsão, p , na forma ilustrada na figura 5, é uma medida do grau de sensibilidade a condições iniciais. A figura 2 ajuda a ilustrar este fenômeno. O chamado expoente de Liapunov é, essencialmente, uma medida quantitativa da taxa de decaimento de ρ com o aumento de p .

Aplicando essas idéias aos dados sobre o sarampo em Nova York, mostrados na figura 6, Sugihara e eu descobrimos o tipo de queda em que ocorre com o aumento de p característico do caos determinístico (linha cheia da figura 7). Isso coincide com os achados anteriores de Schaffer e Kot (menos seguros, estatisticamente) e sugere que a flutuação da incidência de sarampo na cidade de Nova York antes do advento da vacinação, com seus picos irregulares, de dois em dois anos, é de fato uma série temporal deterministicamente caótica (provavelmente determinada pelo interjogo entre um ciclo inerente de 'presa-predador' de cerca de dois anos e um ciclo anual associado ao início e ao fim do período escolar). Já com os dados relativos à catapora na mesma cidade, obtém-se uma relação direta ρ versus p , expressa na linha pontilhada, que se assemelha mais ao tipo 'curva senoidal mais 50% de ruído' da figura 5. Isso sugere que os dados sobre a catapora foram gerados por um ciclo anual tornado randômico por erros de amostragem ou outras fontes adicionais de ruído.

centro da pupila um feixe de luz cuja intensidade pode ser alterada; um circuito eletrônico permite então relacionar as alterações produzidas na área da pupila com a intensidade da luz que está incidindo sobre a retina.

O tempo de reação do reflexo pupilar é cerca de 0,3 segundo. À medida que o período de oscilação na iluminação se reduz até se tornar comparável ao intervalo dessa reação, ou quando a intensidade da luz se torna suficientemente grande, podem ocorrer oscilações complexas na área pupilar. Mackey, Glass e colaboradores conseguiram mostrar, por meio de experimentos controlados, que o reflexo pupilar pode se tornar instável, dando origem aos tipos de comportamento dinâmico teoricamente esperáveis e, por fim, a flutuações caóticas. Numa série paralela de experimentos, mostraram também como a teoria e os modelos experimentais simplificados mostram as mesmas transições do comportamento estável até flutuações caóticas (embora quase-periódicas) numa tarefa simples de 'rastreamento motor', em que os sujeitos têm que acompanhar com o dedo indicador a posição de um alvo móvel.

Esses estudos fisiológicos e neurológicos — como aqueles feitos em laboratório com populações isoladas de animais — dificilmente podem promover um confronto estreito entre a teoria e a realidade *in vivo*. Nas situações artificiais de laboratório, há bons indícios de que a teoria e a experiência coincidem, com diferentes graus de precisão. Essas demonstrações *in vitro*, porém, estão sempre sob o risco de não passarem de experimentos num 'computador vivo'.

Muitos biólogos evolucionistas consideram pouco provável que se encontrem dinâmicas caóticas entre populações reais. Segundo eles, as flutuações caóticas que seriam concomitantes a tais dinâmicas poriam em risco as várias subpopulações, cada uma por sua vez, ameaçando a sobrevivência da espécie a longo prazo. Esse mesmo raciocínio levou os primeiros trabalhos sobre o caos a vê-lo como um vilão, que só se manifestaria, em contextos fisiológicos, nas arritmias ou convulsões das 'doenças dinâmicas', isto é, na patologia.

Ary Goldberger, da Escola de Medicina de Harvard, rejeita essa perspectiva negativa. Afirma que, ao contrário, o caos dotaria o corpo humano da flexibilidade necessária para responder a diferentes tipos de estímulo, e que, em particular, os ritmos cardíacos saudáveis são caóticos.

Essa afirmação baseia-se em análises do espectro de frequência do eletrocardiograma de indivíduos normais e de pacientes que sofreram ataques cardíacos. Segundo o pesquisador, os primeiros apresentam irregularidades em escalas que variam sistematicamente de segundos a dias, ao passo

que os eletrocardiogramas dos pacientes cardíacos exibem um espectro de frequência significativamente mais achatado. O trabalho de Goldberger está sendo muito discutido e alguns críticos observam, com razão, que os padrões amplos no espectro de frequência que ele encontrou não implicam necessariamente caos e que seria preciso dar mais ênfase a conexões diretas entre as dinâmicas dos batimentos cardíacos e o desempenho físico do coração.

Num plano ainda mais especulativo, Alisdair Houston, da Universidade de Oxford, assinalou a existência de um contexto em que a imprevisibilidade associada à dinâmica caótica seria certamente útil. Organismos — sejam protozoários, insetos ou vertebrados — que buscam escapar da perseguição de um predador poderiam se beneficiar de padrões imprevisíveis de comportamento de fuga. Não se sabe se regras simples que geram comportamentos efetivamente erráticos, caóticos, são de fato utilizadas desse modo, mas não há dúvida de que isso seria possível. O mundo dos seres vivos continua a revelar maravilhas que superam nossa imaginação, o que me faz acreditar que é provável que muitos organismos tenham desenvolvido regras simples de comportamento (rígidas entre os insetos, talvez) que geram padrões caoticamente imprevisíveis de comportamento de fuga.

Uma coisa é certa: os sistemas biológicos, desde comunidades e populações até processos fisiológicos e neurológicos, são governados por mecanismos não-lineares. Isto significa que, em contraste com os sistemas físicos — em que grande parte do que interessa é linear —, as dinâmicas caóticas são provavelmente tão frequentes entre eles quanto os ciclos ou a estabilidade que até recentemente monopolizavam nossa atenção. Uma mensagem em que insisto há mais de dez anos, parece ainda mais verdadeira hoje: "Não apenas na pesquisa [biológica], mas no dia-a-dia da política e da economia, estaríamos todos em melhor situação se um maior número de pessoas percebesse que sistemas não-lineares simples não possuem necessariamente propriedades dinâmicas simples."

SUGESTÕES PARA LEITURA

- GLEICK J., *Caos: a criação de uma nova ciência*. Rio de Janeiro, Campus, 1990.
- GLASS L. & Mackey M. C., *From clocks to chaos: the rhythms of life*. Princeton University Press, 1988.
- MAY R. M., 'When two and two do not make four: nonlinear phenomena in ecology' (The Croonian Lecture, 1985), *Proceedings of the Royal Society*, B288, pp. 241-266, 1986.

MEIO AM

A maior riqueza do Brasil é a sua biodiversidade, traduzida no maior número de espécies vegetais e animais do planeta. O que o país deve fazer para preservar e aproveitar racionalmente tais recursos? As algas, por exemplo, atraem a atenção de biólogos e químicos por sua grande importância na indústria de alimentos. Você vai ler sobre isso em *Ciência Hoje — Especial Meio Ambiente*, e também sobre os terremotos induzidos pelas



FOTO DE PEDRO LUSTOSA

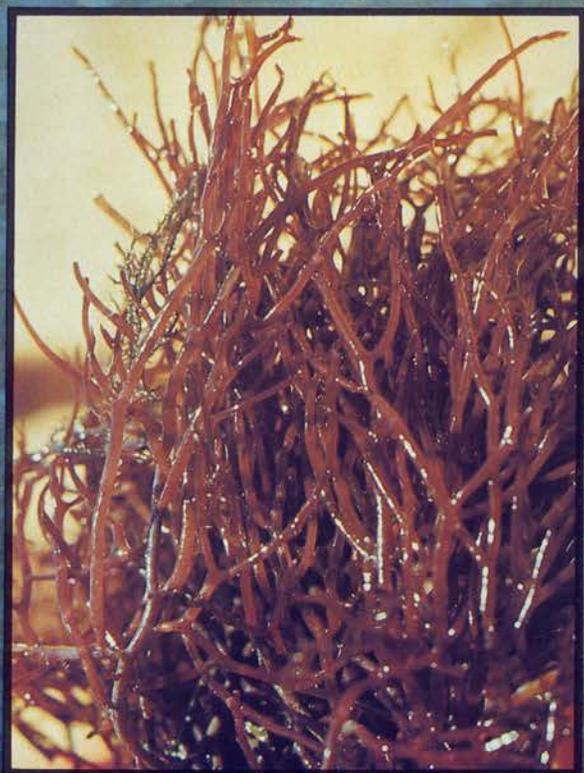


FOTO CEDIADA POR E. C. DE OLIVEIRA

AMBIENTE

grandes represas, a radioatividade a que estamos expostos em nosso cotidiano e as previsões pessimistas sobre a elevação do nível do mar no século XXI. Vai conhecer a história da caça às baleias-jubartes, descobrir o tepui, um original aspecto da paisagem brasileira, acompanhar a aventura de uma expedição em plena pororoca e ter um encontro com Aziz Ab' Saber, responsável pelo Projeto de Reflorestamento Diferencial do Brasil.

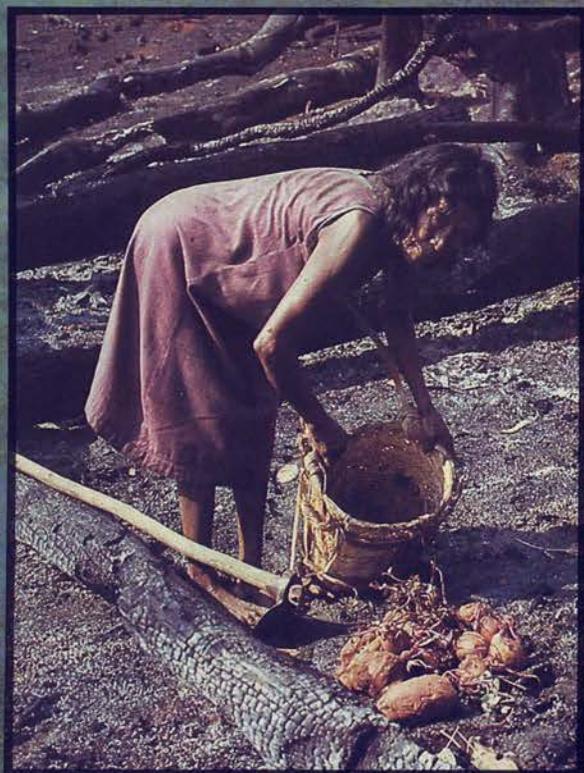


FOTO CEDIADA POR DARREL A. POSEY



FOTO DE ZIG KOCH



A DANÇA DOS SPINS



Sérgio M. Rezende
Departamento de Física,
Universidade Federal de Pernambuco

Ao longo da última década, cientistas das mais diversas áreas, como física, matemática, química e fisiologia, desenvolveram conceitos e descobriram fenômenos comuns a todas elas, inaugurando um novo campo interdisciplinar de investigação: o caos. O que torna esse campo intrigante é que comportamentos extremamente semelhantes podem ser observados em sistemas totalmente distintos.

O caos é um estado complexo caracterizado pela (aparente) imprevisibilidade de comportamento e por grande sensibilidade a pequenas mudanças nas variáveis do sistema ou nas condições iniciais. É observado tanto em sistemas muito simples quanto em sistemas complexos. A condição essencial para um sistema apresentar estado caótico é ser não-linear, isto é, apresentar uma resposta não proporcional ao estímulo.

Hoje sabemos que o comportamento caótico é perfeitamente quantificável e previsível, desde que disponhamos de um modelo matemático, analítico ou numérico para descrever o sistema. Entretanto, para um observador que não conheça o modelo ou não seja capaz de resolvê-lo, o

comportamento de um sistema no estado caótico parece totalmente aleatório e imprevisível.

Nos últimos anos, físicos, matemáticos, químicos, biólogos etc., vêm se dedicando a investigar sistemas específicos, na busca de meios de estimulá-los a terem comportamento caóticos. Na área da física, entre os sistemas não-lineares mais estudados estão os fluidos turbulentos, os *lasers*, os plasmas, as junções supercondutoras, os circuitos elétricos e os materiais magnéticos. São fenômenos de caos observáveis em materiais magnéticos, estudados recentemente, que vamos descrever aqui. Antes, porém, vejamos algumas propriedades gerais do magnetismo e suas aplicações às substâncias.

As propriedades magnéticas das substâncias se devem a uma grandeza básica que alguns átomos apresentam: o *spin* eletrônico. O *spin* se comporta de certa maneira como uma minúscula agulha magnética, tendendo a se alinhar na direção do campo magnético a que está submetido. Quando um material que tem átomos com *spin* (como ferro, níquel, manganês ou cobalto) é posto num campo magnético, como o que é produzido por um ímã, os *spins* tendem a se orientar na direção do campo.

Nas substâncias chamadas paramagnéticas, a agitação térmica se contrapõe ao efeito de alinhamento do campo, de tal modo que a resultante é pequena. Já nas substâncias chamadas ferromagnéticas, há uma forte interação entre *spins* vizinhos, o que favorece o alinhamento. Nessas últimas substâncias, quando a temperatura é inferior a um valor crítico, em geral da ordem de centenas de graus celsius, a ordem devida a essa interação prevalece sobre a desordem térmica. A aplicação de um campo magnético resulta então num grande alinhamento dos *spins*. Nessa situação, dizemos que o material está magnetizado.

Há materiais que retêm uma grande magnetização, mesmo na ausência de campo aplicado, e são utilizados na fabricação de ímãs permanentes. Esse é o caso da magnetita (Fe_3O_4), o ímã natural. Desde tempos muito remotos, ela vem sendo usada na feitura das agulhas magnéticas das bússolas, que se orientam no campo magnético da Terra. Atualmente, os ímãs são feitos com ligas artificiais de vários metais, que produzem campos muito mais intensos que a magnetita. Os ímãs têm grande variedade de aplicações em dispositivos eletromagnéticos, como motores, geradores, fones, microfones, alto-falantes, instrumentos de medida, além de aplicações corriqueiras, como nos fechos de portas de armários, geladeiras etc. O mercado mundial de materiais para ímãs envolve mais de um bilhão de dólares. Por essa razão, a pesquisa para seu aperfeiçoamento é muito intensa em todo o mundo.

Outra classe de materiais magnéticos é a dos chamados de alta permeabilidade. Estes têm um grande alinhamento de *spins*, mas não retêm magnetização quando o campo é retirado. Também têm muitas aplicações tecnológicas como em transformadores, motores, geradores, cabeças de gravação etc., além de serem usados para reforçar o campo magnético produzido por enrolamentos com corrente elétrica.

Finalmente, uma terceira categoria de substâncias magnéticas é a de materiais de gravação magnética. Esses materiais retêm certa magnetização sem campo aplicado, mas que pode ser facilmente anulada ou substituída por outra produzida por um no-

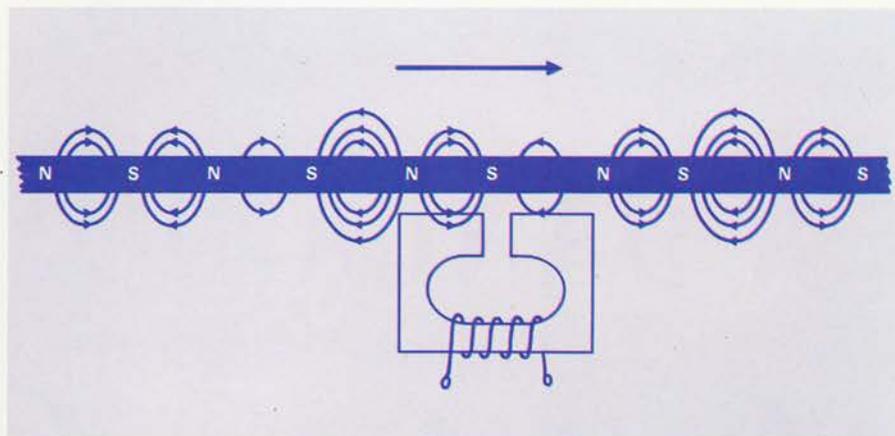


FIGURA 1. Fita de gravação magnética contendo uma magnetização variável que corresponde a certa informação, gravada anteriormente. Quando a fita se movimenta, cada pequena região, que atua como um ímã, induz na cabeça de leitura uma corrente elétrica que reproduz a informação gravada.

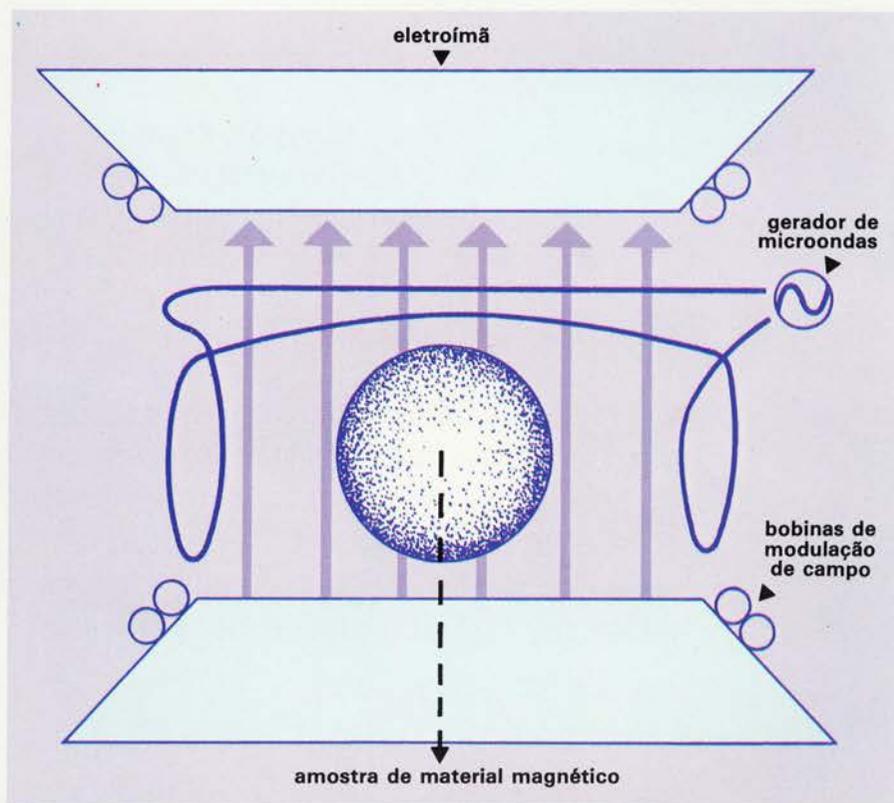


FIGURA 2. Diagrama de montagem experimental utilizada para o estudo do caos em material magnético.

vo campo. Os meios magnéticos mais utilizados para gravação são feitos pela deposição de uma emulsão de partículas magnéticas, como de magnetita (Fe_3O_4) ou de dióxido de cromo (CrO_2), sobre a superfície de um material plástico. A informação é gravada no meio em movimento (disco ou fita), através de uma corrente elétrica variável que percorre a cabeça de gravação, produzindo uma magnetização que varia ao longo desse meio. No processo de leitura ilustrado na figura 1, a magnetização variável correspondente à informação gravada induz, em decorrência do movimento da fita, uma corrente elétrica na cabeça de lei-

tura. O mercado de equipamentos que envolvem fitas ou discos de gravação magnética para áudio, vídeo e computadores é hoje superior a 30 bilhões de dólares. Por isso, o interesse econômico desses materiais é muito grande.

Mas não é apenas por sua importância tecnológica e econômica que os materiais magnéticos concentram hoje intensa atividade de pesquisa no mundo inteiro. O magnetismo dos materiais forma um dos campos de pesquisa básica mais férteis e ativos da física, dada à imensa diversidade das suas propriedades e dos fenômenos que nelas são observados.

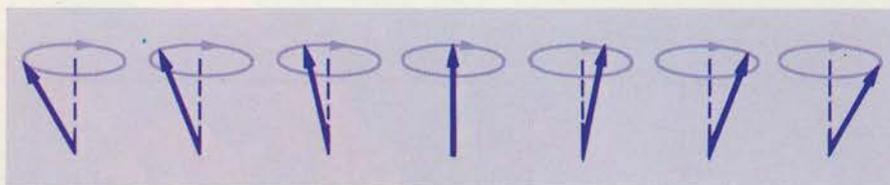


FIGURA 3. Precessionando em torno do campo do eletroímã e apresentando uma defasagem ao longo do material, os spins formam uma onda de spin.

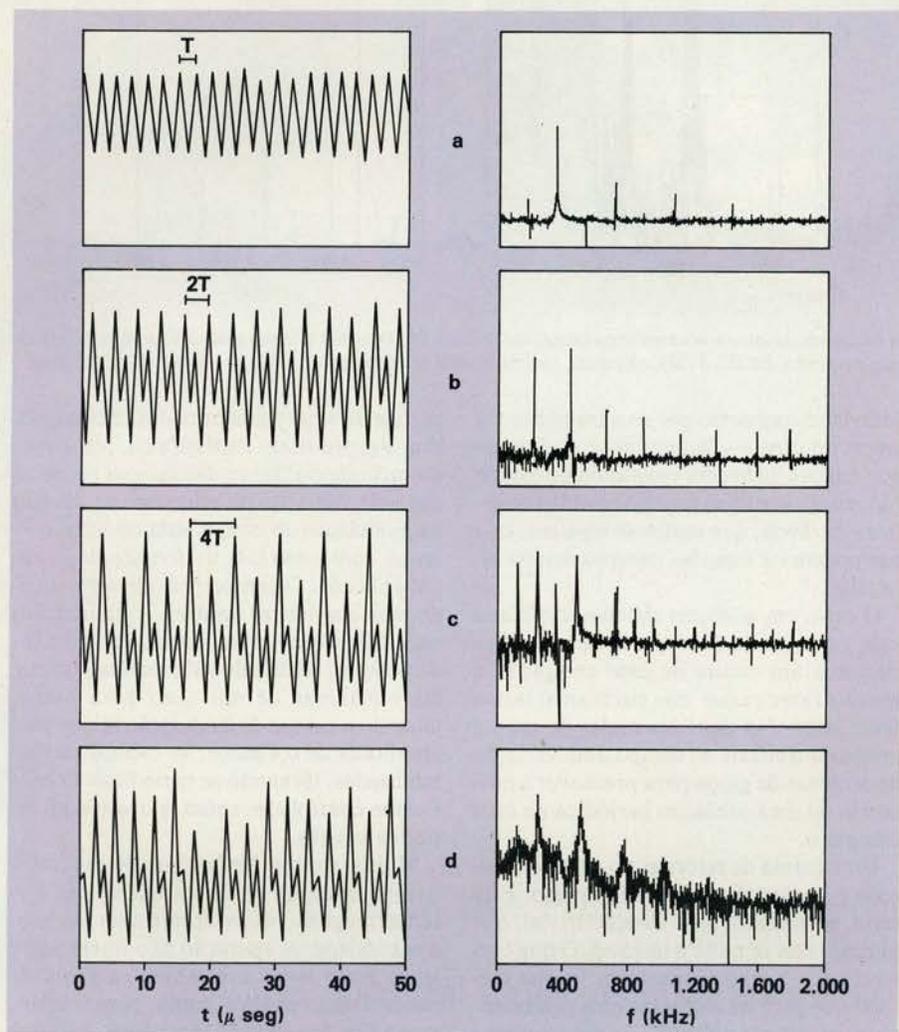


FIGURA 4. Em (a), (b) e (c), vemos registros das oscilações no tempo (lado esquerdo) e dos espectros de frequência correspondentes (lado direito) ao sinal proveniente da amostra para três valores do campo magnético. Em (d), vemos o estado caótico.

Um desses fenômenos é o caos, que pode ser produzido em certas experiências com materiais magnéticos. Na figura 2, temos a representação esquemática de uma montagem utilizada para estudar esse fenômeno. Uma pequena esfera de óxido de ferro e ítrio ($Y_3Fe_5O_{12}$), um material de alta permeabilidade, é colocada entre os pólos de um eletroímã, que produz um campo magnético ajustável.

A intensidade do campo utilizado é da ordem de 3.000 gauss. Para efeito de comparação, o campo da Terra, que orienta as agulhas das bússolas, é de 0,5 gauss. Os spins da amostra, que interagem fortemen-

te uns com os outros, ficam então alinhados na direção do campo. Se um spin for perturbado e desviado momentaneamente de sua orientação, em vez de voltar de imediato para a direção do campo, ele passa a descrever um movimento no qual uma extremidade do spin permanece fixa e a outra gira em torno do campo. Esse movimento, chamado de precessão, está ilustrado na figura 3. O movimento é semelhante ao de um pião de brinquedo ou ao de um giroscópio, que precessiona em torno do campo gravitacional da Terra. A frequência de precessão do spin é proporcional à intensidade do campo magnético. Pa-

ra campos da ordem de 3.000 gauss, ela é da ordem de 10 GHz (1 GHz é igual a um bilhão de ciclos por segundo). Essa frequência está na faixa de microondas do espectro eletromagnético, que é utilizada em radares e em comunicações por meio de satélites.

Uma maneira simples de perturbar o spin é fazê-lo precessionar através de um campo magnético variável, com frequência na faixa de microondas, superposto ao campo estático do eletroímã. Esse campo pode ser aplicado por meio de espiras alimentadas por um gerador de microondas, como na figura 2, ou por meio de uma cavidade ressonante de microondas.

Por interagirem fortemente entre si, os spins da amostra precessionam coletivamente, formando uma onda de spin, ilustrada na figura 3. Faz-se a experiência mantendo fixo o valor do campo estático e aumentando, enquanto isso, o campo de microondas ou vice-versa. Se o campo de microondas é pequeno, a taxa de energia fornecida aos spins é menor que a taxa em que ela é dissipada na forma de calor. Nesse caso, não há excitação de ondas de spin. Quando o campo de microondas é aumentado e atinge um valor crítico, uma onda de spin é excitada. Se o campo é aumentado ainda mais, várias ondas diferentes são excitadas. O resultado começa então a ficar interessante, porque a interação entre as ondas de spin é não-linear.

Quando dois spins vizinhos, que estavam paralelos na situação de equilíbrio, são desviados, fazendo um ângulo α , a força que tende a restaurar o alinhamento é proporcional a $\alpha - \alpha^3/6$. O primeiro termo é linear. Se apenas ele estivesse presente, não haveria interação entre duas ondas de spin. O segundo termo, que é proporcional ao cubo do ângulo, é responsável pela dinâmica não-linear. Por causa dele, duas ondas de spin competem dinamicamente para absorver energia do campo de microondas. Disso resulta uma oscilação espontânea que se manifesta como uma modulação do sinal absorvido pela amostra. A frequência dessa oscilação é da ordem de 100 kHz, cem mil vezes menor, portanto, que a das microondas. Facilmente detectável, ela pode ser digitada eletronicamente e armazenada num computador, para análise; pode também ser observada diretamente, na tela de um osciloscópio.

A figura 4 mostra o registro da oscilação para vários valores do campo. Em (a), vemos, do lado esquerdo, uma oscilação com período $T = 2,5 \mu\text{seg}$ (um microssegundo é um milionésimo do segundo); do lado esquerdo, vemos o espectro da oscilação. O primeiro pico intenso está na posição de frequência $f = 400 \text{ kHz}$, que corresponde precisamente à relação $f = 1/T$.

Se o campo é um pouco aumentado, a

oscilação só se repete num intervalo de tempo $2T$. Ocorre então um dobramento de período, mostrado em (b), que corresponde ao aparecimento de um sub-harmônico de frequência $f/2$ no espectro do lado direito. Com o progressivo aumento do campo, uma seqüência de dobramentos de período, $4T$, $8T$, $16T$, ocorre em intervalos de campos cada vez menores, até que o sinal deixa de ser periódico.

Por fim, em (d), o sinal não se repete nunca — é o estado de caos. O espectro de frequências corres-

pondente já não tem picos bem-definidos e estreitos, como no caso de sinais periódicos. Essa seqüência de dobramentos ou duplicações de período é a chamada rota de Feigenbaum para o caos. Os intervalos em que os dobramentos se dão obedecem a uma relação universal, encontrada nos mais diversos sistemas, numa universalidade que faz dos fenômenos caóticos um dos mais interessantes e básicos na ciência neste fim de século.

Os resultados ilustrados na figura 4 foram obtidos em 1987 por Antônio Azevedo, constando da tese de mestrado que apresentou ao Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco. Dois anos antes, nosso grupo tinha sido pioneiro na observação do caos em materiais magnéticos excitados com campo de microondas paralelo ao campo estático (os resultados foram publicados em *Physical Review Letters*, vol. 56, p. 1.070, 1986).

Desde então, temos estudado a dinâmica não-linear de ondas *spin* com grande detalhe. Aprendemos a caracterizar os atratores estranhos no caos de várias maneiras, como, por exemplo, através de sua dimensão fractal. Os resultados experimentais são comparados com simulações em computador das equações não-diferenciais que descrevem o movimento dos *spins*.

Mais recentemente, em sua tese de doutorado, Antônio Azevedo obteve novo resultado entusiasmante: o controle do caos de ondas de *spin* (ver 'É possível controlar o caos!', em *Ciência Hoje* n° 71, p. 61). A idéia de tentar controlar o caos foi inspirada num artigo teórico publicado no volume 64 da *Physical Review Letters*. Os autores, Edward Ott, James Yorke e Celso Grebogi — grupo da Universidade de

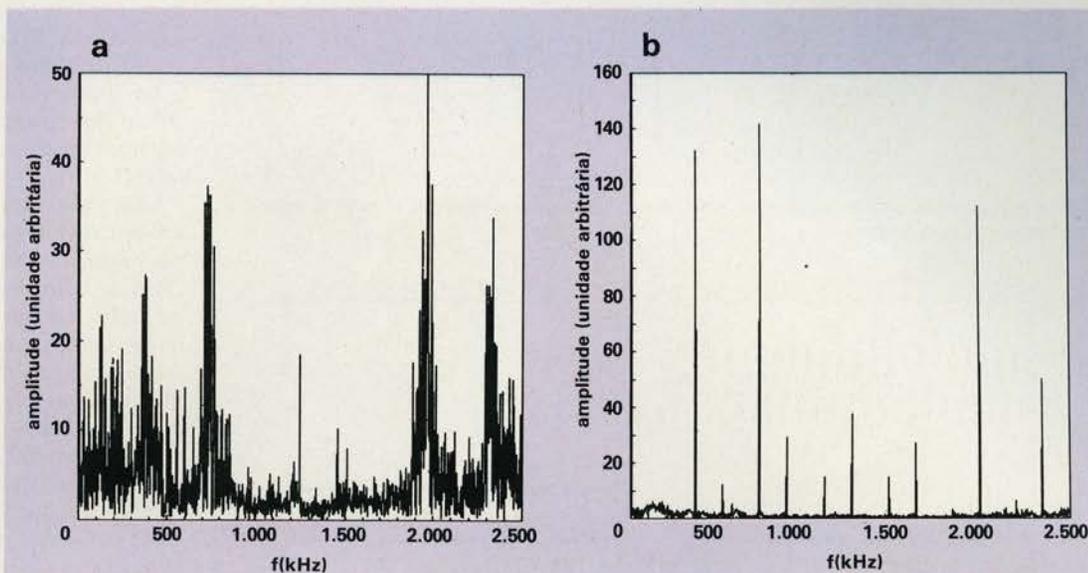


FIGURA 5. Espectro do sinal de microondas observado em experiência de controle do caos. Em (a), vemos o estado caótico, caracterizado pela ausência de modulação no campo magnético. Em (b), o caos controlado, com modulação de frequência de 1.480 kHz e amplitude de 0,4 gauss.

Maryland conhecido por seus trabalhos em teoria do caos —, basearam-se no fato de que sempre há ordem escondida no estado caótico. Essa ordem é caracterizada por órbitas instáveis, que nunca se repetem, mas que podem ser seguidas e eventualmente alteradas.

O caos, em qualquer sistema, é afetado pela variação de certo parâmetro — para chegar a um estado de caos completo, é preciso fazer variar esse parâmetro numa faixa larga. No caso das ondas de *spin*, é preciso introduzir no campo uma variação de centenas de gauss para promover a passagem de uma oscilação periódica ao caos completo.

Uma forma de retornar do caos seria alterar o parâmetro no sentido oposto. Esta seria, entretanto, uma solução trivial, que muitas vezes se mostra inviável. O que Ott, Grebogi e Yorke propuseram foi um método que permite controlar uma órbita instável do sistema por meio de uma pequena variação periódica controlada, que a tornaria estável, eliminando o caos. A chave para o controle do caos em cada sistema estaria em descobrir que parâmetro deve ser variado para que a órbita se estabilize.

Após algumas tentativas, conseguimos encontrar a maneira de controlar as órbitas das ondas de *spin*. A idéia foi modular o campo magnético do eletroímã, através das bobinas mostradas antes, na figura 2. Utilizamos para isso uma corrente alternada, de frequência próxima à da oscilação ou à de um de seus múltiplos. Não foi necessário variar o campo estático em centenas de gauss — um campo variável, periódico de menos de 1 gauss, foi o bastante para permitir o controle do caos.

Esse resultado é ilustrado na figura 5, através dos espectros das oscilações na am-

plitude do sinal de microondas. Em (a), vemos o espectro do sinal caótico, resultante da turbulência das ondas de *spin* produzidas pela radiação de microondas; ali não há modulação no campo estático. Uma corrente, com 1.480 kHz de frequência, é então aplicada. O campo periódico produzido atua nas órbitas instáveis, cuja frequência média é de 370 kHz, quatro vezes em cada período, 'ajeitando-as' e tentando torná-las repetitivas de um ciclo para outro. Quando o campo de modulação atinge uma amplitude de 0,4 gauss, as órbitas são estabilizadas, tornando-se periódicas. O caos é assim controlado, como se observa no espectro em (b).

Muitos outros fenômenos de dinâmica não-linear estão sendo estudados em materiais magnéticos que apresentam fenômenos caóticos. A interação não-linear entre *spins* pode levar a arranjos caóticos de magnetização estática, como, por exemplo, numa fita de gravação magnética. Estudos teóricos nessa linha têm sido feitos por vários grupos no Brasil, cabendo destacar o de Sylvio Salinas, da Universidade de São Paulo, e o de Constantino Tsallis, no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

SUGESTÕES PARA LEITURA

- BERGE P., POMEAU Y. & VIDAL C., *Order within chaos*, John Wiley, New York, 1984.
 REZENDE S.M., 'Aplicações tecnológicas de materiais magnéticos', *Boletim da Sociedade Brasileira de Física*, n° 1, ano 18, 1987.
 SCHUSTER H.G., *Deterministic Chaos*, Physik-Verlag, Weinheim, 1984.



Quem pesquisa a flora brasileira encontra recursos inesperados

A Fundação José Pedro de Araujo premia anualmente trabalhos de pesquisa científica, voltados para o aproveitamento do potencial terapêutico da flora brasileira.

Inscreva seu trabalho, realizado individualmente ou em equipe até 31 de julho e concorra ao prêmio de Cr\$ 30 milhões em 1992.


Prêmio
José Pedro de Araujo


Informações e inscrições:

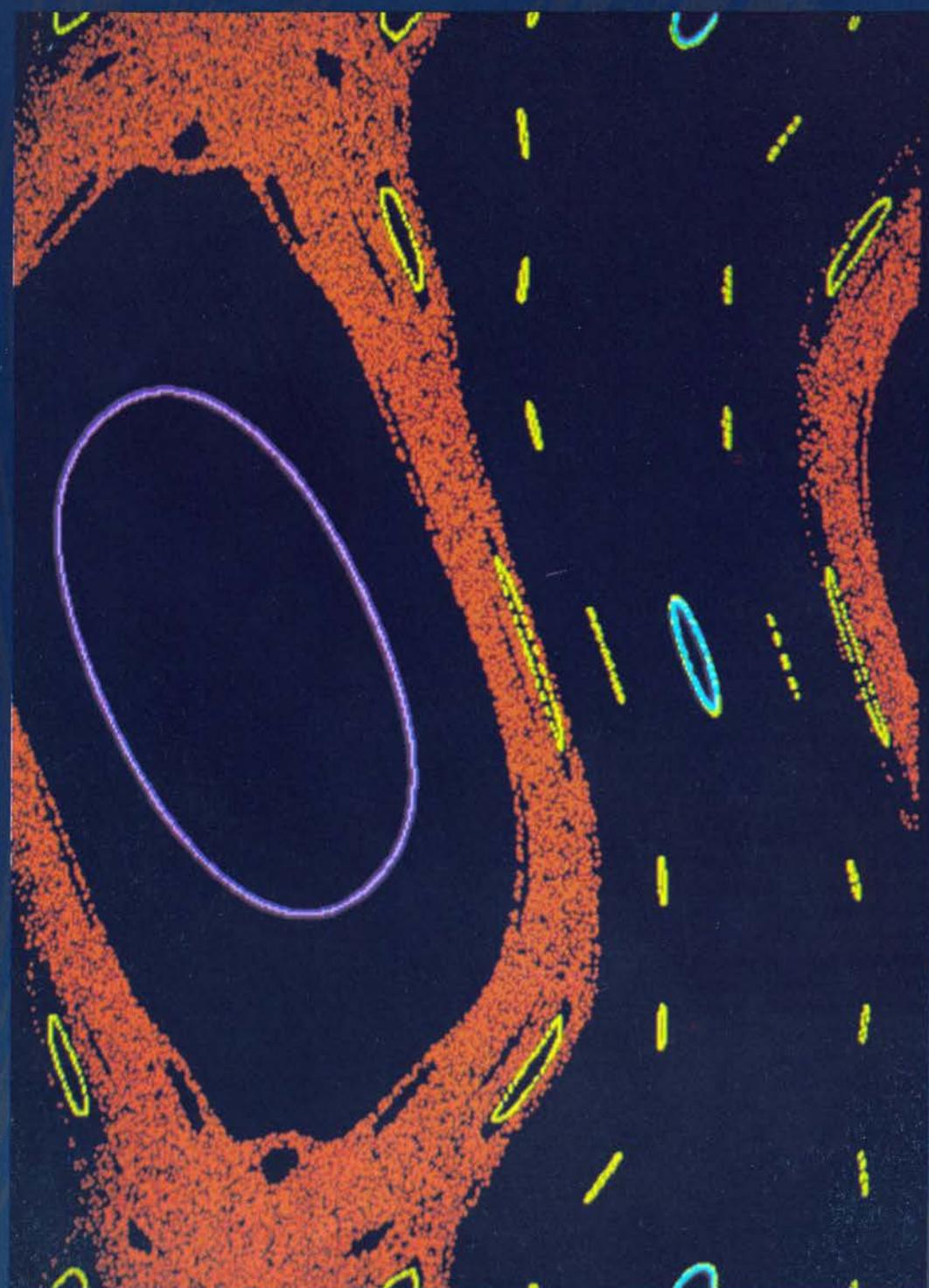
Fundação José Pedro de Araujo

Av. do Contorno, 4.520 - 7º andar - 30110 - Belo Horizonte - MG
tel (031) 227-6599 - ramal 248 - telex (31) 1347

Apoio Cultural



NANSEN S.A.
Instrumentos de Precisão



A DESORDEM INEVITÁVEL

Antônio Sérgio Teixeira Pires e Bismarck Vaz da Costa
Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais

O comportamento desorganizado ou não-periódico em áreas como a dinâmica dos fluidos já era de certo modo conhecido. Menos óbvias, no entanto, pareciam suas aplicações no campo da mecânica, da epidemiologia ou no estudo dos batimentos cardíacos. Até as bússolas, quando ligeiramente perturbadas, se mostram "desnorteadas".

Nos últimos anos, a teoria de sistemas não-lineares, em geral, e a do comportamento caótico, em particular, se tornaram uma das áreas mais avançadas de pesquisa em ciência. Tanto na pesquisa teórica quanto experimental, o comportamento caótico, isto é, o comportamento desorganizado, não-periódico, irregular foi descoberto em um número muito grande de fenômenos. Em algumas áreas isso já era mais ou menos esperado, como é o caso da dinâmica de fluidos, das reações químicas, da propagação da luz em *lasers* e da mecânica celeste. Eram menos óbvias as aplicações em outras áreas. Em fisiologia, o estudo do caos mostrou uma importância inesperada para as pesquisas sobre fibrilação, leucemia, enxaquecas e arritmias respiratórias, para citar apenas alguns exemplos.

Com poucas exceções, foi só a partir de 1975 que a atividade em torno dos sistemas caóticos se desenvolveu com maior intensidade. No início da década de 1960, Edward Lorenz, meteorologista norte-americano, se convenceu de que a dificuldade para previsão do tempo não se devia a ruídos externos, mas era de fato compatível com uma descrição determinística completa, isto é, proveniente apenas das equações que descrevem o sistema e sem a presença de forças aleatórias externas. Então estu-

dou o caos em um modelo simples de três equações diferenciais não-lineares ordinárias de primeira ordem acopladas, com vistas à aplicação em meteorologia.

Em 1971, os matemáticos David Ruelle, francês, e Floris Takens, holandês, apresentaram um mecanismo possível por intermédio do qual poderiam aparecer soluções turbulentas para uma equação usada para descrever o comportamento de um líquido — a equação de Navier-Stokes —, quando um dos parâmetros sofria alteração. A turbulência, embora sendo um fenômeno facilmente produzido quando, por exemplo, abrimos o tampão de uma banheira cheia d'água, permanece misteriosa e controversa. No entanto, já em 1908, o grande matemático e filósofo francês Henri Poincaré, em sua obra *Ciência e método*, apresentara algumas idéias sobre a impossibilidade de predições, considerando que o conhecimento do estado inicial de um sistema é cercado de incerteza [ver artigo 'Primórdios do caos determinístico'.]

Para entender o caos, precisamos antes entender o que é um sistema não-linear. Duas soluções de uma equação linear podem ser somadas para formar uma terceira solução. Essa propriedade matemática é chamada de princípio de superposição. Esse princípio não se aplica, entretanto, a equações não-lineares.

Pelo menos outras três características distinguem os fenômenos físicos lineares dos não-lineares. Em primeiro lugar, o movimento é qualitativamente diferente nos dois tipos de fenômeno. O movimento típico dos sistemas lineares, no espaço e no tempo, é regular e 'bem-comportado', podendo ser descrito em termos de funções matemáticas 'bem-comportadas'. Sistemas não-lineares típicos, entretanto, podem mudar com frequência de um movimento aparentemente regular para um movimento caótico.

Em segundo lugar, a resposta de um sistema linear a pequenas mudanças em seus parâmetros, ou a estímulos externos, é em geral suave, proporcional à mudança ou ao estímulo. Nos sistemas não-lineares, porém, uma mudança pequena nos parâmetros pode produzir uma diferença qualitativa enorme no movimento.

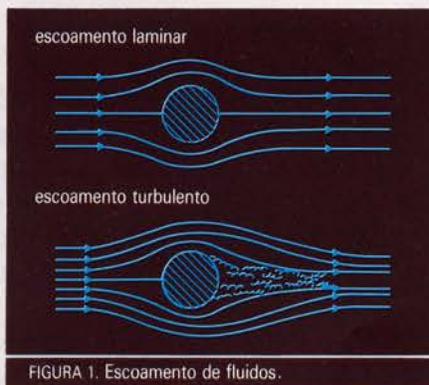
Finalmente, uma terceira característica do sistema linear é que um pulso de onda nele localizado decairá devido ao seu alargamento. Trata-se do fenômeno de dispersão, que ocorre, por exemplo, em ondas de pequena amplitude na água. Em contraste, em certos sistemas não-lineares, podemos ter estruturas altamente coerentes e estáveis, que permanecem por longo tempo ou, no caso ideal, por um tempo infinito. A ordem dessas estruturas coerentes contrasta com o comportamento irregular e errático que elas podem apresentar, como é o caso de um furacão, por exemplo.

O movimento não-periódico, irregular, aleatório, já observado em uma variedade muito grande de sistemas não-lineares, é chamado caos determinístico. Essa expressão significa que, embora o processo em questão seja estritamente determinístico, isto é, descrito por regras fixas e bem-determinadas (equações diferenciais) e todas as forças atuantes sejam conhecidas, seu comportamento para tempos longos não pode ser predito e é tão aleatório quanto a jogada de uma moeda.

Se fosse possível conhecer com exatidão as posições e velocidades de todas as partículas envolvidas em um sistema — isto caracteriza o 'estado' do sistema —, bem como a natureza de todas as forças agindo entre elas —, isto é, se tivéssemos um sistema ideal —, poderíamos, em princípio, prever seu comportamento exato em um tempo futuro. Mas nunca podemos saber exatamente o estado em que um sistema real se encontra. Feita uma medida, sempre podemos tentar refazê-la com maior precisão. Nos sistemas lineares, quando as condições de dois experimentos independentes são aproximadamente as mesmas, os estados finais serão também aproximadamente os mesmos. No entanto, para a maior parte dos sistemas não-lineares isso

deixa de ser verdade e como resultado temos o caos determinístico.

Consideremos um rio. Quando a água se move em baixa velocidade sobre um leito tranquilo, dizemos que o escoamento é laminar, tendo as características do movimento linear: previsível, regular, descrito em termos matemáticos de forma simples. Se colocarmos dois pedaços de cortiça próximos um ao outro, eles permanecerão juntos, ou se afastarão um do outro mantendo uma distância de separação proporcional ao tempo. Quando a velocidade da água excede um valor crítico, o movimento se torna turbulento, com vórtices (redemoinhos) localizados, que se movem de maneira irregular, complicada e errática (figura 1). Repetindo a experiência, os pedaços de cortiça se separam de uma maneira que depende exponencialmente do tempo.



Naturalmente, quanto mais próximos estiverem um do outro no início, maior será o tempo em que seus movimentos permanecerão similares. Mas sejam quais forem as separações iniciais, haverá um tempo finito após o qual os movimentos serão totalmente distintos. Como não conhecemos com precisão absoluta a posição de cada pedaço de cortiça, será impossível determinar sua posição subsequente.

O exemplo da jogada da moeda, comumente usado para exemplificar sistemas aleatórios, é *a priori* determinístico: se conhecêssemos a posição exata da moeda e todas as forças envolvidas no momento do lançamento, poderíamos prever com exatidão o resultado final. No entanto, isso é impossível no caso concreto e uma diferença muito pequena da posição inicial pode levar à cara ou à coroa. Então, para todos os efeitos práticos, o processo é totalmente aleatório.

Mesmo se os cálculos da trajetória de um sistema forem feitos numericamente, com um grande computador, encontramos o mesmo tipo de problema quando a equação é não-linear, devido a erros de arredondamento. Vamos considerar um exemplo muito simples de regra determinista que apresenta comportamento caótico. Come-

çamos com um número X_0 menor que um. Multipliquemos este número por dois e tomemos apenas a parte decimal. Repetindo o processo n vezes, teremos o seguinte resultado: $X_n = 2^n X_0$ (módulo 1). [módulo 1 significa tomar a parte decimal]

Para dois números inicialmente muito próximos teremos uma rápida separação exponencial do resultado final. Escrevendo X_0 como um número binário de base dois, por exemplo $X_0 = 0,101101\dots$ (com um número finito de dígitos, pois o computador trabalha com aritmética finita), vemos que a cada passo da operação a multiplicação por dois consiste simplesmente em um desvio da vírgula para a direita, como ocorre com a multiplicação por dez na base decimal, tal que $X_1 = 0,01101\dots$, $X_2 = 0,1101$, $X_3 = 0,101\dots$, $X_4 = 0,10\dots$. Observe que a operação módulo 1 significa que, se surgir um antes da vírgula, ele deve ser transformado em zero, ou seja, se subtrai um. Em cada operação o computador substitui o último *bit* da direita por um número qualquer ('lixo'). Assim, em cada iteração (repetição), perdemos um *bit* de informação. Se X_0 é dado inicialmente com 16 *bits* de precisão, depois de 16 iterações não teremos mais nenhuma informação a respeito do número inicial e o computador passará a fornecer dígitos aleatoriamente.

Como o resultado $X_{n+1} = 2X_n$, desprezando-se a parte inteira, está entre zero e um, podemos separar este intervalo em duas partes. Uma célula à esquerda (em vermelho) é dada por $0 < X < 1/2$ e uma à direita (em azul) por $1/2 < X < 1$. Pela representação binária, vemos que um dado X_n está na célula esquerda (ou direita) se seu próximo dígito à direita da vírgula for zero (ou um) [figura 2]. O ponto representativo descreve uma 'órbita' entre essas duas células. Se alguém, conhecendo uma órbita precisa de um sistema, nos disser apenas que o número X_n está na célula da direita ou da esquerda, poderemos escrever uma seqüência de números zero e um, representando a ordem em que o ponto representativo visita as células da esquerda e da direita. Tomamos zero para a célula da esquerda e um para a da direita. Essa seqüência será idêntica a um desenvolvimento binário decimal de X_0 , para a órbita dada. Como não podemos em geral determinar os dígitos seguintes de X_0 conhecendo apenas a parte finita passada de sua seqüência de dígitos, a órbita verdadeira será caótica, pela nossa definição de caos. Sendo assim, a ordem dos números zero e um na representação binária de X_0 é tão aleatória quanto uma seqüência de jogadas com a moeda. Como um computador executa apenas aritmética finita, esse processo é usado como um algoritmo para se obterem números pseudo-aleatórios em um computador.

Essa discussão torna-se particularmente importante em meteorologia. Não só em virtude da impossibilidade de se partir de um estado inicial bem conhecido, mas também dos erros de arredondamento do computador, a previsão do tempo por longos períodos é uma tarefa quase impossível. Como disse Lorenz (o meteorologista mencionado no início deste artigo), fazendo uma caricatura ilustrativa dessa situação, "até o bater de asas de uma borboleta pode mudar as condições iniciais e influenciar o comportamento atmosférico a longo prazo".

Uma outra característica de sistemas não-lineares é que o comportamento caótico em geral não ocorre para todos os valores dos parâmetros externos e das condições iniciais do sistema. Como exemplo, consideremos um modelo matemático simples para o aumento no número de indivíduos infectados por uma doença contagiosa. Primeiro, derivamos uma equação para a taxa de crescimento do número desses indivíduos. Seja N o número de pessoas infectadas no tempo t em uma população de M indivíduos. Suponhamos que a taxa α pela qual uma pessoa infectada transmite a doença para outras não varie com o tempo, nem de pessoa para pessoa. Então, durante o intervalo de tempo Δt , os N infectados na população contagiarão αN pessoas. Mas as pessoas correspondentes à fração N/M de αN já estavam infectadas, assim, durante o tempo Δt , há um número adicional de $\alpha N - \alpha N (N/M)$ pessoas infectadas, ou seja:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \alpha N (1 - N/M)$$

que é uma equação básica em epidemiologia. Ela pode ter importantes consequências na propagação de epidemias como, por exemplo, da Aids.

Tomando uma unidade de tempo discreta — por exemplo, um dia — e chamando de X_n a fração de pessoas infectadas no dia n , a equação acima pode ser expressa como

$$X_{n+1} = X_n [1 + \alpha (1 - X_n)]$$

que fornece a fração de pessoas X_{n+1} infectadas no $(n + 1)$ ésimo dia, sendo conhecida a fração X_n infectada no n ésimo dia. A equação acima, com uma simples mudança de variáveis,

$$X \rightarrow \frac{\alpha}{1 + \alpha} X, r = 1 + \alpha$$

pode ser escrita como

$$X_{n+1} = r X_n (1 - X_n)$$

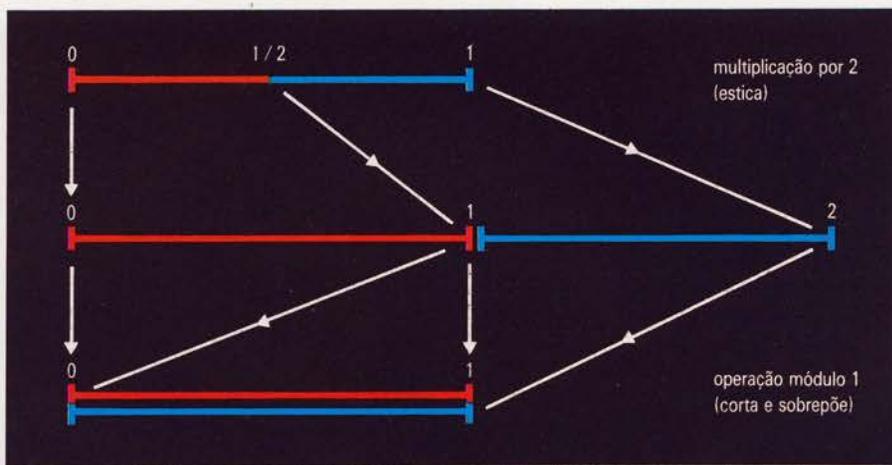


FIGURA 2. Representação geométrica da operação $X_{n+1} = 2X_n (\text{módulo } 1)$.

Chamamos r de um parâmetro de controle que depende de vários fatores e deve ser determinado experimentalmente. Essa equação, chamada equação logística, serve também para descrever vários outros fenômenos na natureza [ver 'O infinito em cores', nesta edição].

Um outro exemplo é o caso em que X_n se refere à população de insetos cujas gerações não se sobrepõem. Imaginemos, como um modelo simples para tal sistema, uma ilha isolada, contendo uma população de insetos que se acasalam no verão e deixam ovos que fornecerão filhotes no próximo verão; X_n será a população (ou melhor, a fração da população no n -ésimo ano, em relação a uma população de referência) em cada verão. O primeiro termo rX_n no lado direito da equação logística representa agora o crescimento natural da população; o termo rX_n^2 representa uma redução desse crescimento natural causada pela superpopulação de insetos.

Na verdade, como demonstrado pelo físico norte-americano Mitchell Feigenbaum, em 1979, qualquer transformação do tipo $X_n \rightarrow X_{n+1}$ que seja quadrática (ou seja, que a função tenha a forma de uma parábola) nas proximidades do ponto de máximo tem o mesmo comportamento dinâmico que a equação logística. Essa é uma equação tão simples que de início podemos pensar que nada contém de interessante. Mas ela possui uma estrutura regular e intrincada bastante complexa. Seu comportamento depende criticamente do parâmetro de controle r e em certas regiões de valores de r ocorrem mudanças súbitas e violentas, em resposta a pequenas variações de r .

Para mantermos a fração da população de insetos entre zero e um, tomaremos r entre zero e quatro. Se r é menor do que um, a população diminuirá gradativamente a cada ano, qualquer que seja a população inicial, até desaparecer por completo. A região de r entre um e três mostra um outro tipo de comportamento simples. Começan-

do com um X_0 qualquer, entre zero e um, a população se aproxima de um valor constante não nulo que chamaremos de X^* . Tomando $X_n = X_{n+1} = X^*$ na equação logística, encontramos que $X^* = 1 - 1/r$.

Quando r aumenta acima de três, o ponto X^* se torna instável, ocorrendo o que chamamos de bifurcação: a população de insetos, após várias gerações, oscilará entre dois valores. Os insetos começam uma nova e pequena população, reproduzem-se avidamente e deixam muitos ovos. No ano seguinte, a população será tão numerosa que a geração subsequente será baixa pelos efeitos de superpopulação. Anos ímpares, por exemplo, terão populações grandes e anos pares populações pequenas.

Quando r ultrapassa o valor 3,4495, o comportamento estável se manifesta num ciclo de quatro anos (período 4). Aumentando r , teremos ciclos de período 8, 16, 32 anos e assim por diante, para todos os valores de 2^n . Finalmente, para $r = 3,5699\dots$ aparece um ciclo de valor infinito. Para alguns valores de r superiores ao valor acima, a seqüência de valores de X_n torna-se aperiódica, deixando de se repetir e mostrando comportamento caótico. Dizemos então que em $r = 3,5699\dots$ ocorre uma transição para o caos (ver figura 3). E exa-

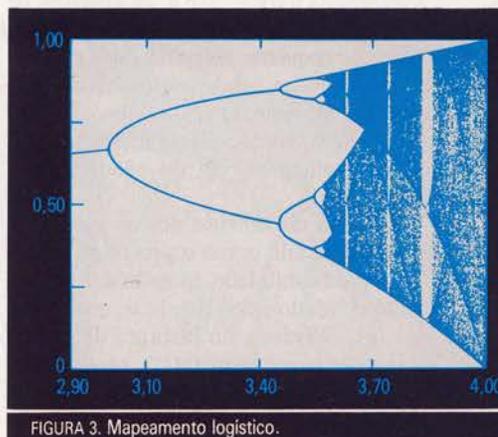


FIGURA 3. Mapeamento logístico.

tamente quando $r = 4$, escrevendo $X = \sin^2(\pi y)$, verificamos que a equação logística tem como solução $Y_{n+1} = 2 Y_n$, módulo 2π , que é a equação estudada antes, quando discutimos o erro de arredondamento em computadores.

Podem-se verificar todas as afirmações acima usando uma simples máquina de calcular. Embora tenhamos usado a equação logística por ela ser simples, o mesmo tipo de comportamento é encontrado em várias outras equações não-lineares. A discussão dessa equação ilustra a segunda característica dos sistemas não-lineares, isto é: para certos valores do parâmetro de controle, o sistema mostra um comportamento regular, mas ao atingirmos um certo valor crítico deste parâmetro, o sistema passa a exibir bruscamente comportamento caótico.

Nessa região caótica, qualquer incerteza inicial na especificação de X_0 crescerá exponencialmente com o crescimento do número de iterações n . Devido a esse crescimento exponencial do erro, o determinismo é, do ponto de vista prático, somente uma propriedade local temporária, que se anula rapidamente. A idéia de que a aleatoriedade impossibilita o determinismo é baseada na suposição de que computação ou precisão observacional infinita é impossível. Se supuséssemos uma capacidade de observação e uma computação infinitas, teríamos, então, um esquema totalmente determinístico, ou seja, previsível.

Uma terceira característica dos sistemas não-lineares é a universalidade. Isso significa que, para certos fenômenos caóticos, os detalhes do sistema e as equações descritivas dos mesmos são irrelevantes; o comportamento observado no sistema é semelhante, seja em dinâmica de fluidos, em circuitos elétricos não-lineares ou em biologia.

Um pêndulo simples, constituído de um objeto que pode oscilar, perturbado por uma força externa periódica, é um modelo físico comum de oscilador não-linear, que nos permite estudar muitas características do aparecimento de caos. Quando o pêndulo está livre — isto é, na ausência de força externa —, seu movimento é regular. Diante de pequenas perturbações e para alguns valores das condições iniciais do pêndulo, seu movimento se torna caótico, enquanto para outros valores mantém-se regular e semelhante ao do pêndulo não-perturbado.

Mesmo o movimento dos corpos celestes, considerado como o protótipo de ordem e predicabilidade, quando minuciosamente estudado pelos cientistas, como o físico Jack Wisdom, do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), revelou uma natureza caótica. Um exemplo disso é Hyperion, um pequeno satélite de Saturno, que não tem um período de rotação estável e

O CAOS SE INSTALA NA BÚSSOLA

Um sistema muito simples e que todos nós já tivemos oportunidade de observar consiste em uma agulha imantada, suspensa por um eixo que passa pelo seu centro. Se aproximarmos um ímã da agulha, ela sofrerá uma torção, alinhando-se como mostra a figura 4, numa posição que será a de energia potencial mínima (equilíbrio estável) do sistema.

Se deslocarmos ligeiramente a agulha, ela irá oscilar, parando alinhada ao ímã após certo intervalo de tempo. Se não houvesse atrito, ela oscilaria indefinidamente. Podemos também fazer com que a agulha gire sobre seu eixo, em movimento de rotação, dando-lhe um peteleco suficientemente forte. Esse movimento também continuaria indefinidamente não fosse o atrito.

Essas duas situações permitem-nos inferir que existem pelo menos dois tipos de movimento para a agulha: oscilação e rotação. Deve haver, entretanto, um regime intermediário entre esses dois movimentos. Tal regime deve se situar numa região muito sensível a quaisquer perturbações externas, pois o sistema deve decidir entre a oscilação e a rotação.

Para descrever o que ocorre na região intermediária, vamos examinar a questão sob um enfoque quantitativo. A equação que descreve o movimento da agulha é facilmente obtida com a segunda lei de Newton:

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} = - \frac{1}{3} \frac{a F}{I} \sin \Theta$$

em que Θ é o ângulo de deflexão da agulha, a é o seu comprimento e I seu momento de inércia (figura 5). F representa a força que

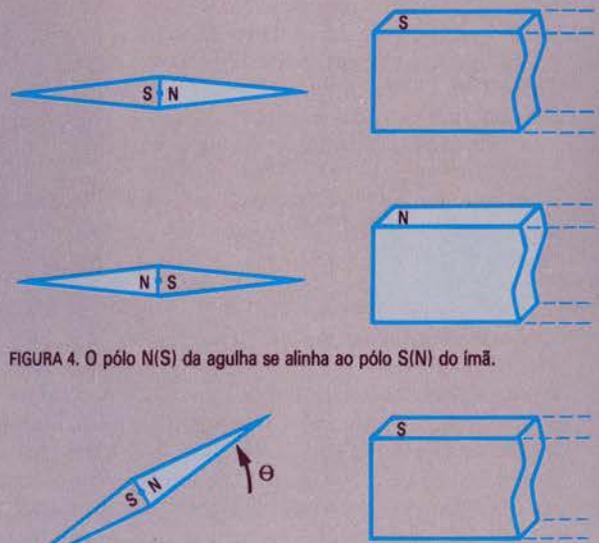


FIGURA 4. O pólo N(S) da agulha se alinha ao pólo S(N) do ímã.

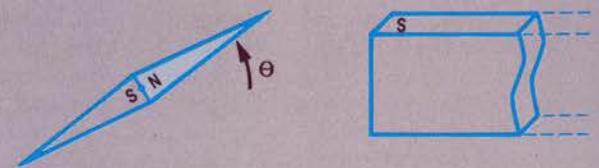


FIGURA 5. Θ é o ângulo de deflexão da agulha em relação à sua posição de equilíbrio.

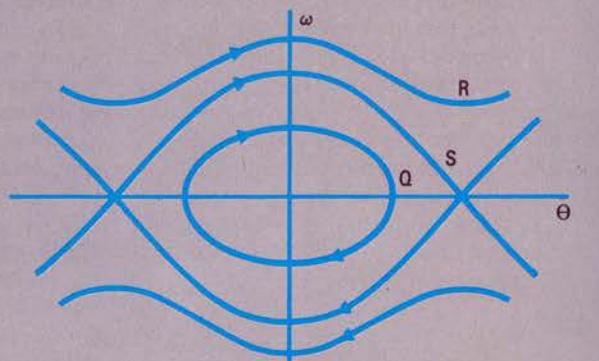


FIGURA 6. A curva interna (Q) representa a oscilação; a intermediária (S), o movimento sobre a separatriz; e a mais externa (R), o movimento de rotação.

age sobre a agulha, em virtude da presença do ímã.

Essa é uma equação diferencial de segunda ordem e para obter sua solução (isto é, Θ como função do tempo t), devemos ter duas condições iniciais: o ângulo de deflexão Θ_0 e a velocidade angular ω_0 , no instante $t = 0$. Essas condições iniciais serão determinadas pelo nosso peteleco. Somente em casos particulares essa equação pode ser resolvida analiticamente, mas podemos obter para ela soluções numéricas.

A figura 6, que é um gráfico da velocidade angular em função do ângulo de deflexão Θ , mostra as solu-

ções obtidas no caso de oscilação e rotação. A curva fechada representa a oscilação e a mais externa a solução de rotação. A curva intermediária representa a separação entre os dois tipos de movimento e é chamada de separatriz. Assim, a figura 3 descreve o movimento completo do sistema agulha-ímã.

Uma maneira simples de introduzir uma perturbação no movimento da agulha é deslocando-se o ímã em um movimento, por exemplo, de vai e vem. Nesse caso, a agulha sentirá uma força $F = F(t)$, dependente do tempo. A fórmula que descreverá esse

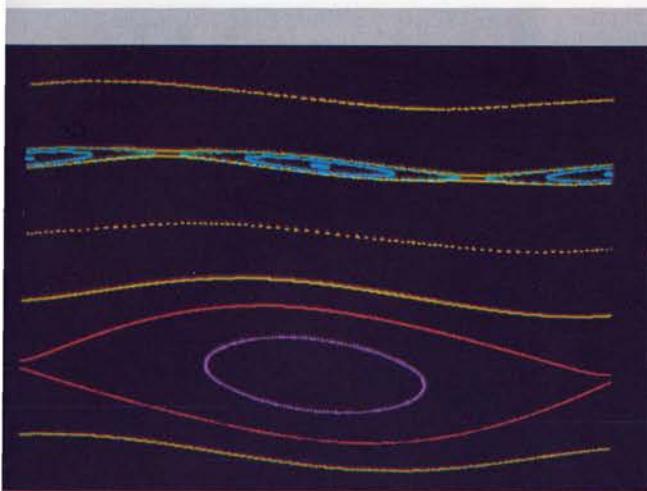


FIGURA 7.

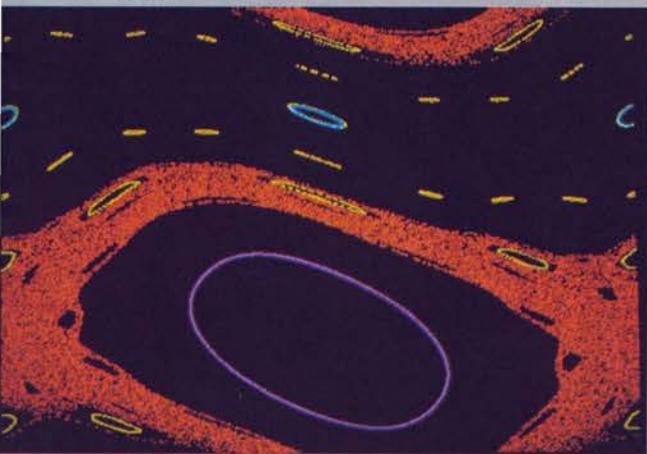


FIGURA 8.

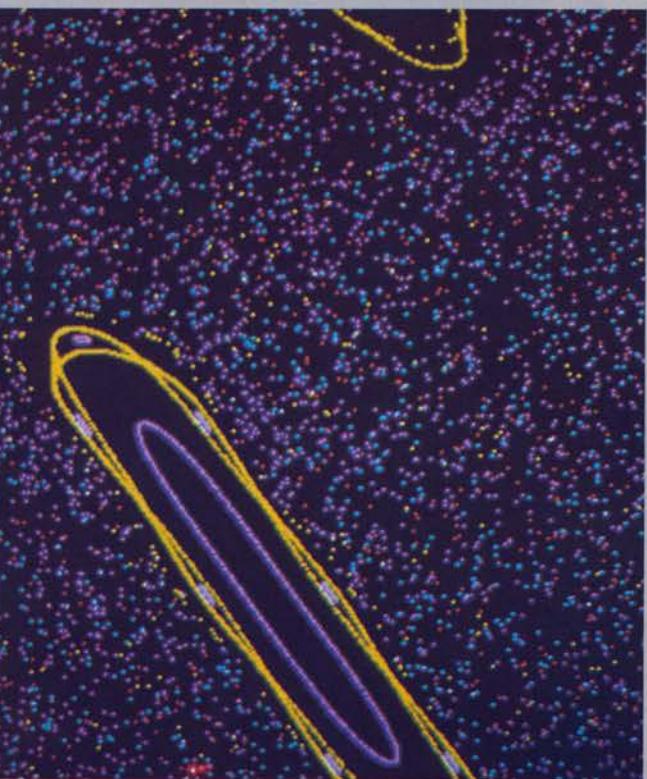


FIGURA 9.

FOTOS GERIDAS PELOS AUTORES

movimento será ainda a mesma equação.

Para sermos mais específicos a respeito da força $F(t)$, vamos supor que ela seja periódica e possa ser escrita como uma série de Fourier:

$$F(t) = F_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t),$$

onde F_0 é o valor máximo da força e Ω é a frequência fundamental do movimento de vai e vem. Se $\Omega = 0$, a força externa é constante, e voltamos à situação descrita mais acima. As figuras 7, 8 e 9 mostram o comportamento obtido quando resolvemos numericamente a equação, usando F como força externa. O único parâmetro que variamos para ir da figura 7 à figura 9 foi o valor máximo da força externa F_0 . As diferentes cores correspondem às diferentes condições iniciais adotadas para os três valores de F_0 usados (0,5 / 1,0 / 1,5). Na figura 7 ($F_0 = 0,5$), o movimento é muito regular, e existem linhas que podemos acompanhar com um lápis, sem tirá-lo do papel. Se compararmos essa curva com aquela da figura 7, observamos que a perturbação externa não foi ainda suficientemente forte para mudar as características do movimento.

Na figura 8 ($F_0 = 1,0$), existem ainda regiões regulares, mas a região que fica entre a rotação e a oscilação foi totalmente preenchida, dando-se somente uma condição inicial (em vermelho). As regiões regulares são a exceção: quase todas as curvas regulares se misturaram, como uma gota de tinta na água. Começando com uma única condição inicial (Θ_0, ω_0), o movimento subsequente se distribui sobre todo o plano $\Theta \times \omega$. Esse é o comportamento típico de um sistema caótico.

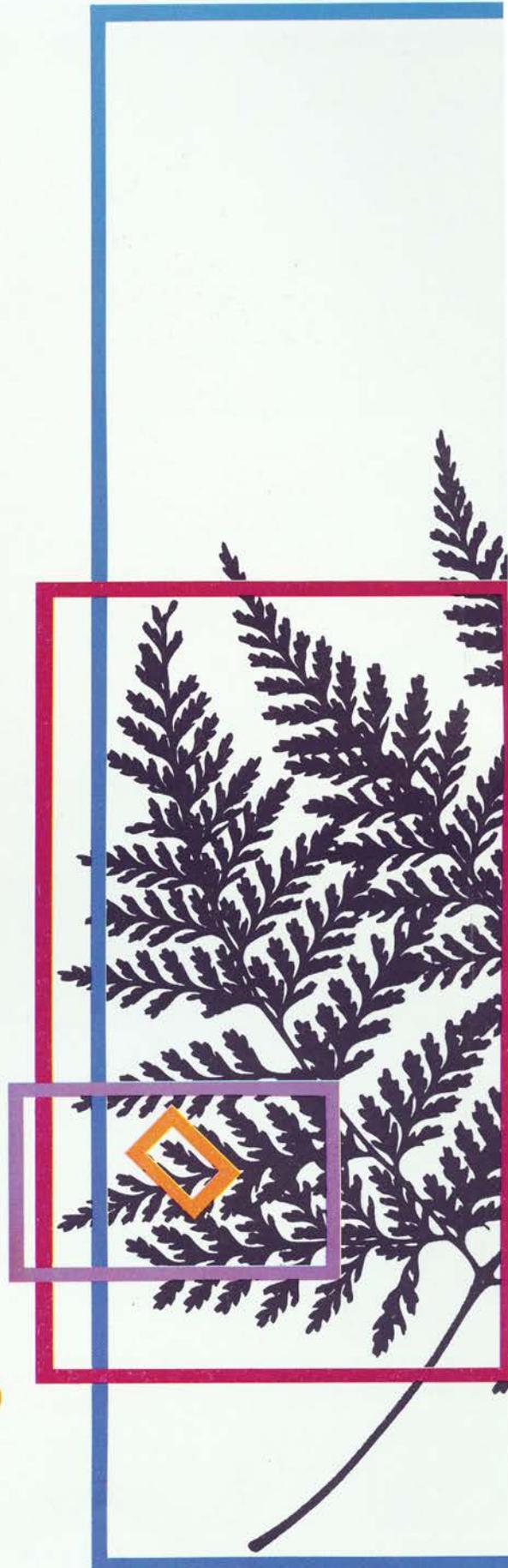
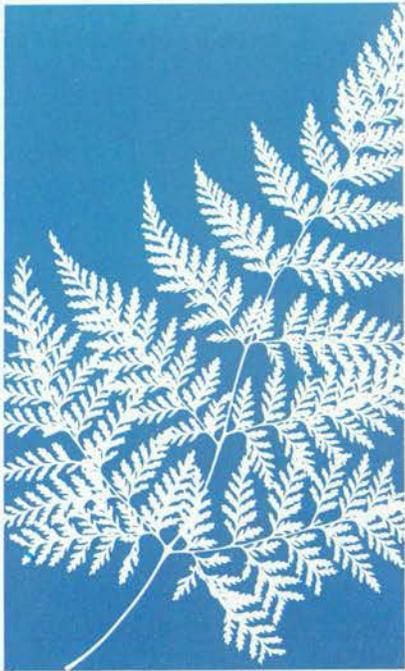
mostra um movimento de rotação caótico ao girar em torno daquele planeta. Segundo Wisdom, a presença de falhas no cinturão de asteróides, situado entre as órbitas de Marte e Júpiter, também está relacionada a efeitos de caos. Ele afirma ainda que os meteoritos podem ter sua origem em fenômenos de caos. No entanto, cálculos numéricos realizados em um computador de alta velocidade mostram que o sistema solar é estável (pelo menos por um bilhão de anos ainda), com exceção de Plutão, que mostra um comportamento com certo grau de instabilidade.

Como exemplo de aplicação dos estudos sobre caos a outro domínio, citemos a fisiologia: o regime cardíaco normal é periódico, mas existem certas patologias não-periódicas — como a fibrilação ventricular — que podem levar à morte. O estudo por computador de modelos matemáticos realísticos, que reproduzissem os vários regimes dinâmicos do coração, traria um grande benefício para a medicina.

A descoberta do caos em sistemas físicos levou a um novo entendimento das leis da natureza. O caos é inevitável, mesmo para sistemas físicos muito simples. Por um lado, existe uma ordem não esperada dentro do caos, em virtude das simetrias no movimento regular que o suporta. Sistemas não-caóticos são raros, embora sirvam quase sempre de base para nossa compreensão física da natureza. Por outro lado, para a classe dominante de sistemas caóticos, erros iniciais de observação em geral crescem exponencialmente e o determinismo torna-se sem sentido numa curta escala de tempo. Assim, se a precisão infinita deve ser abandonada, é necessário que os estudiosos estejam atentos para o fato de que as equações determinísticas, como a lei de Newton, por exemplo, não garantem a capacidade de previsibilidade, em virtude das incertezas nas condições iniciais dos sistemas a que se aplicam.

SUGESTÕES PARA LEITURA

- GLASS, LEON & MICHAEL C. MAKEY, *From clocks to chaos: the rhythms of life*, Princeton University Press, 1988.
- MAY, R.M., 'Simple mathematical models with very complicated dynamics', *Nature*, vol. 261, p. 459, 1976.



“Beauty is truth and truth beauty”
(Beleza é verdade e verdade é beleza)
John Keats



O INFINITO EM CORES

Francisco Tamarit, Sergio Cannas
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas,
Faculdade de Astronomia, Matemática e Física,
Universidade de Córdoba, Argentina

Thadeu J.P. Penna, Paulo Murilo C. Oliveira
Departamento de Física,
Universidade Federal Fluminense

Constantino Tsallis, Helio F.V. de Resende
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Como aumenta o número de indivíduos num ecossistema? Quais as formas de reprodução de uma bactéria numa lâmina de laboratório em função dos alimentos? Como prever a evolução de uma empresa? Em quanto tempo um elemento radioativo se torna inofensivo? Os mesmos modelos matemáticos que traduzem o comportamento futuro de sistemas como esses produzem figuras multicoloridas nas telas de computadores — os fractais.

Um dos mais importantes objetivos da ciência é atingir a capacidade de prever o comportamento futuro de um certo sistema. Exemplos bem concretos são os serviços de previsão de chuvas, tempestades e terremotos. Os cientistas formulam modelos matemáticos, levando em conta os aspectos fundamentais do sistema em estudo, e analisam a variação desse sistema no tempo, sua evolução dinâmica. Em geral, esses modelos são simplificados, retendo apenas alguns dos parâmetros que influenciam a evolução dos fenômenos. Esse procedimento torna o problema solucionável do ponto de vista matemático e dá ao pesquisador a percepção de quanto e como cada um dos parâmetros influencia a evolução dos fenômenos.

Os modelos são gradativamente aperfeiçoados e os mais novos incluem aspectos não considerados nos anteriores. No estudo da dinâmica das populações, por exemplo, deseja-se saber como aumenta (ou diminui) o número de indivíduos de uma dada espécie. Este é um problema naturalmente complexo, uma vez que todo o ecossistema em que essa espécie se insere irá influenciar e ser influenciado pela variação daquele número. Um primeiro modelo, bastante simplista, levaria em conta apenas a renovação da reserva alimentar da espécie segundo uma taxa fixa, ignorando os demais aspectos da questão. A conclusão, também simplista, seria que o número de indivíduos da espécie atinge um valor constante, determinado pela taxa de renovação alimentar.

Este seria o caso, por exemplo, de uma bactéria em reprodução controlada numa lâmina de laboratório, na qual se depositam alimentos todos os dias. O pesquisador poderia obter de seu modelo informações tais como o número terminal de bactérias em função da quantidade de alimentos, ou o tempo necessário para atingir esse estado terminal a partir de umas poucas bactérias iniciais. Este modelo, no entanto, não é indicado para o estudo da evolução da mesma espécie de bactérias em seu ambiente natural. Neste caso, outros parâmetros, como a exaustão da fonte alimentar, possíveis predações, alternativas alimentares, deveriam ser incluídos no modelo. A formulação matemática, então, será bem mais complexa.

Situação semelhante à da bactéria na lâmina do microscópio seria a de um economista brasileiro ao estudar a evolução de uma empresa ou de um setor empresarial agraciado com subsídios estatais predeterminados, num mercado estável. Na ausência de tais subsídios, entretanto, as interações da empresa com os demais agentes socioeconômicos teriam de ser consideradas e o modelo matemático se complicaria.

Para dar um exemplo concreto da modelização de um sistema real, vamos considerar uma amostra com um número inicial N_0 de átomos radioativos (que ainda têm capacidade de emitir radiação). À medida que o tempo passa, esse número vai diminuindo, porque cada átomo que já irradiou se torna inerte, e a amostra vai se tornando gradativamente inofensiva. Por quanto tempo essa amostra deve ser mantida em isolamento antes de se tornar totalmente inofensiva em termos práticos?

Denominaremos N_t o número de átomos ainda radioativos após t dias ($t = 0$ define a situação inicial). Claramente, o número $N_t - N_{t+1}$ de átomos que irradiam num certo dia t é proporcional ao valor atual N_t . Portanto podemos escrever a equação

$$N_t - N_{t+1} = \lambda N_t \quad 1$$

onde o fator de proporcionalidade λ (muito menor do que 1 porque o processo demora anos, em geral) é característico do elemento químico em questão, podendo ser medido e tabelado previamente.

Reescrevendo a mesma equação na forma

$$N_{t+1} = (1 - \lambda) N_t \quad 2$$

obtemos o que em matemática se chama de mapa iterativo. Este mapa serve para fornecer o valor futuro de N_{t+1} que ocorrerá amanhã, em função do valor atual N_t observado hoje. É esta capacidade de previsão citada anteriormente.

Este mapa pode ser estudado num computador — ou até mesmo numa simples calculadora eletrônica — de forma iterati-

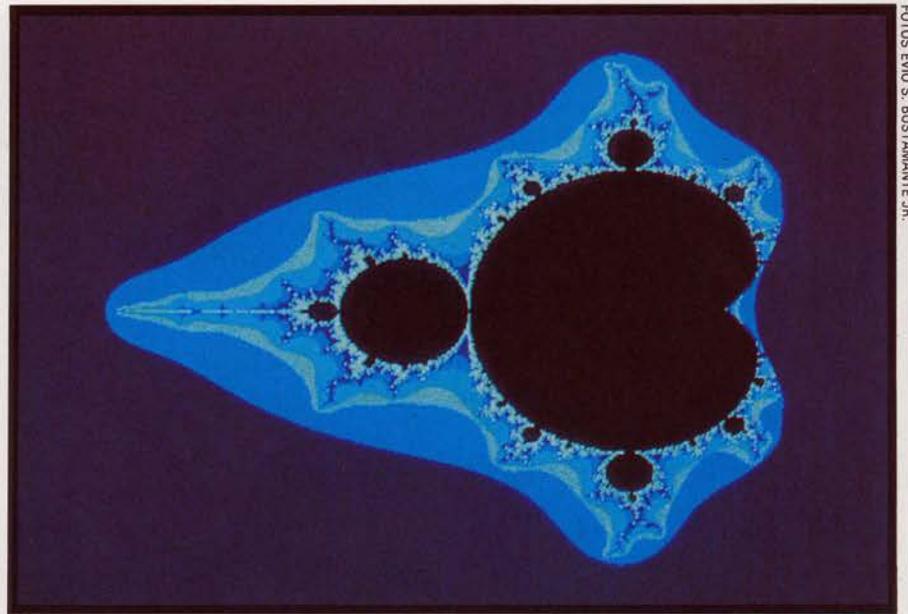


FIGURA 1. Figura de Mandelbrot fotografada da tela de um computador e gerada por iterações sucessivas de uma equação quadrática. Com a precisão numérica do computador, obtêm-se detalhes ampliados em escalas cada vez maiores de partes desta figura.

va, isto é, que permita efetuar repetidamente a operação matemática indicada, para valores sucessivos de N_t , com $t = 0, 1, 2, 3$ etc. Se programado para repetir o cálculo sete vezes, por exemplo, o computador nos fornecerá o número de átomos radioativos ainda presentes após uma semana. Se programado para repeti-lo até a amostra se tornar praticamente inofensiva, o computador nos responderá à questão prática formulada anteriormente: durante quanto tempo a amostra deverá ser isolada por razões de segurança?

Três comentários acerca deste exemplo simples — o decaimento radioativo — merecem destaque:

1) O leitor amante da matemática notará que não se necessita neste caso recorrer ao computador, para obter os valores relevantes à questão. A solução do problema pode ser obtida analiticamente pela equação:

$$N_t = N_0 (1 - \lambda)^t \quad 3$$

Para valores muito grandes de t pode-se ainda considerar o intervalo de um dia como infinitesimal e transformar o mapa que relaciona o valor futuro N_{t+1} com o atual N_t numa equação diferencial, cuja solução será:

$$N_t = N_0 \exp(-\lambda t) \quad 4$$

2) O comportamento a longo prazo do sistema é simples. O valor terminal de N (para t muito grande) é uma constante, no caso igual a zero. Para outros casos igualmente simples, como o das bactérias na lâmina do microscópio, o valor terminal é ainda uma constante, desta vez não-nula. Este valor terminal da variável dinâmica é chamado atrator.

3) O mapa exemplificado é linear. A relação matemática que nos dá o valor futuro de N_{t+1} em função do atual N_t não contém quadrados, cubos, senos, logaritmos, ou ainda quaisquer outras complicações. Apenas uma relação de proporcionalidade define o mapa. Esta característica linear está relacionada com o comportamento simples citado no comentário anterior.

Na natureza são inúmeros os exemplos de sistemas dinâmicos não-lineares. Não obstante, os pesquisadores dedicam especial atenção à linearidade, em parte porque neste caso sua tarefa se torna menos árdua e especialmente porque desta forma conseguem dar soluções aproximadas a problemas 'quase lineares'. O estudo de sistemas realmente não-lineares é recente e acompanha o explosivo aumento da capacidade de computação, proporcionada pelo advento de computadores e algoritmos rápidos.

Sistemas não-lineares podem apresentar comportamentos surpreendentemente complexos. Por exemplo, no caso da dinâmica de duas populações, sendo uma a presa e a outra a predadora, podemos antever diferentes casos, dependendo dos valores dos parâmetros envolvidos. Pode acontecer que a população predadora se extinga e a população presa se estabilize, ou cresça indefinidamente. Pode acontecer, ao contrário, que a espécie presa seja extinta, caso em que a predadora também acabará por se extinguir, devido à falta de alimento. E, finalmente, pode-se chegar a um regime relativamente simples, com populações não-nulas de presas e predadores.

Neste terceiro caso, o regime pode ter

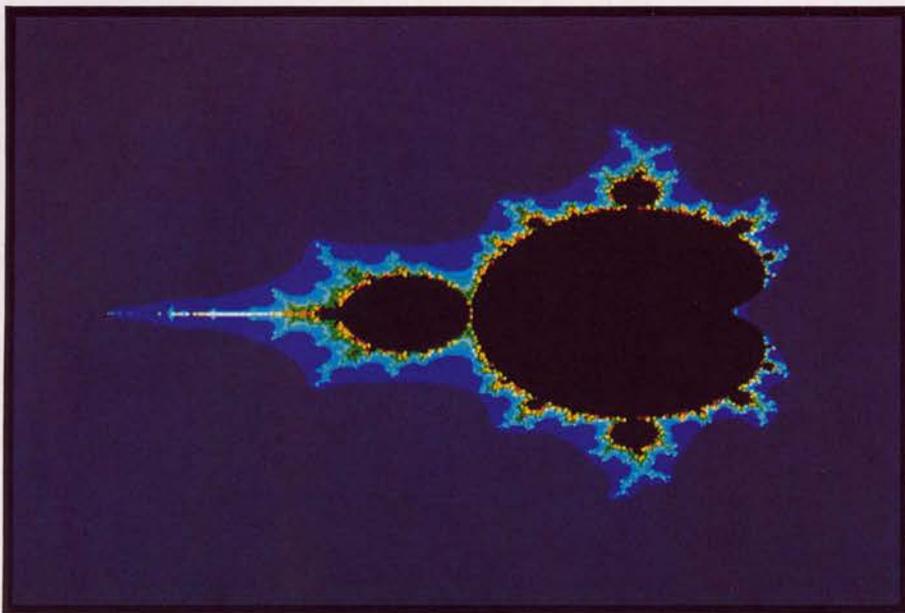


FIGURA 2. Extensão da figura anterior, obtida através da introdução de uma descontinuidade na equação quadrática. Neste caso, o espaço de parâmetros é tridimensional e a figura representa um corte plano deste espaço.

simplesmente valores constantes para os números de indivíduos de cada espécie, ou ainda, numa situação mais complexa, esses números poderão variar periodicamente no tempo (e então o atrator não consistirá mais num único valor constante para cada espécie, mas numa seqüência finita de valores que se repete indefinidamente). Uma última alternativa — a mais inesperada — ocorrerá se esta variação não for periódica, ficando o poder de previsão prejudicado (neste caso, o atrator é mais complicado ainda, constituindo-se numa seqüência infinita de valores que não se repetem jamais). Vamos considerar um valor x que varie dinamicamente, de acordo com o seguinte mapa quadrático (portanto, não-linear):

$$x_{t+1} = x_t^2 - C \quad \mathbf{5}$$

onde o parâmetro de controle C é uma constante que depende do sistema estudado. Não vamos nos interessar aqui senão pelo aspecto matemático do mapa citado, sem nos determos no sistema real que lhe tenha dado origem. Para $C = 0$, por exemplo, o leitor poderá verificar que qualquer valor inicial x_0 entre -1 e $+1$ convergirá inexoravelmente para $x = 0$, caracterizando um comportamento tão simples como os casos lineares. Para $C = 2$, entretanto, podemos observar comportamentos distintos. Por exemplo, no caso $C = 2$, o valor inicial $x_0 = 1$ se repete indefinidamente numa seqüência estacionária, assim como o valor inicial $x_0 = 2$ também se repetirá indefinidamente.

Outros valores iniciais de x , no entanto, apresentam comportamentos complexos sem repetições aparentes. O leitor curioso está desafiado a testar valores iniciais de

x ao acaso. Tomando um valor inicial x_0 muito próximo de $x = -1$, por exemplo, poder-se-ia inferir (erradamente) que o comportamento a longo prazo fosse muito próximo daquele observado para x_0 exatamente igual a -1 . Não é: valores iniciais muito próximos entre si dão origem a comportamentos completamente distintos à medida que o tempo passa!

Este fato é fundamentalmente nocivo para aqueles que pretendem fazer previsões a respeito do sistema real regido aproximadamente pelo mapa em questão: qualquer pequeno desvio inicial afastará o sistema do comportamento previsto a partir de uma situação suposta, exatamente conhecida no início. É o caos. Mais precisamente, é o que os matemáticos chamam de *caos determinístico*, expressão que contém uma aparente incoerência: a equação parece sugerir que se pode prever com exatidão o comportamento do sistema — uma vez conhecida a sua situação inicial. Entretanto, qualquer pequena incerteza, mesmo controlada, que se seja obrigado a admitir no conhecimento desta situação inicial acarretará a ignorância quase absoluta da evolução do sistema. O poder de previsão a longo prazo se desfaz.

Um exemplo concreto é a previsão meteorológica. Hoje em dia usam-se os mais modernos computadores e os algoritmos mais sofisticados nessa tarefa. Mesmo assim, as previsões só podem ser garantidas a curtíssimo prazo — ou seja, em dias — e sob incertezas consideráveis. Estudando este mapa quadrático simples, o físico Mitchell Feigenbaum descobriu e demonstrou importantes propriedades universais (isto é, válidas também para outros mapas se-

melhantes) dos sistemas dinâmicos no limiar de se tornarem caóticos. [Ver 'Os efeitos da descontinuidade'.]

O leitor que aceitou o desafio de testar o mapa quadrático para o caso $C = 2$, observando a evolução dinâmica a partir de diferentes valores iniciais de x , certamente notou que há dois regimes distintos. Primeiro, valores iniciais de x entre -2 e 2 permanecem sempre dentro deste mesmo intervalo, por maior que seja o número de iterações (repetições) efetuadas. É o regime confinado no qual se estabeleceu o caos (no sentido definido acima) e a capacidade de previsão é restrita. Por outro lado, valores iniciais de x maiores do que 2 ou menores do que -2 acabam crescendo indefinidamente, à medida que as iterações se repetem. É o regime aberto, no qual a capacidade de previsão se restabelece, no sentido de que qualquer valor inicial vai inexoravelmente crescer sem limites a longo prazo.

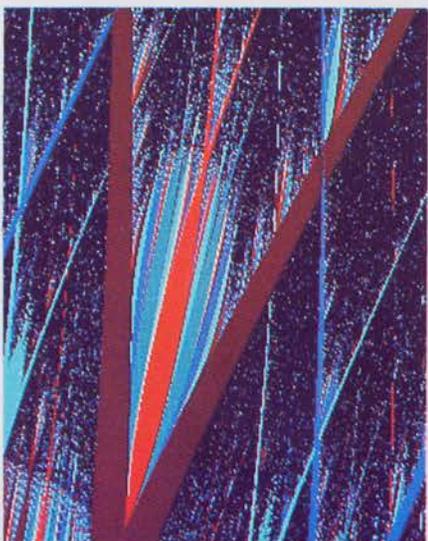
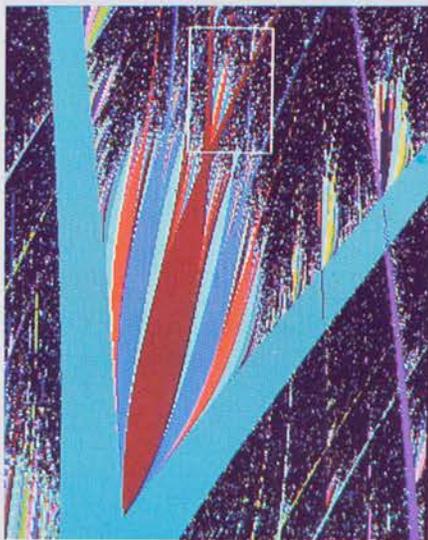
Vamos nos deter neste segundo regime, o aberto. Apesar de se observar sempre o mesmo comportamento a longo prazo — ou seja, valores sucessivos de x sempre crescentes —, pode-se demorar mais ou menos tempo antes de se atingir esta situação, dependendo do valor inicial de x . Por exemplo, tomando-se inicialmente $x_0 = 2,000001$, deve-se esperar dez iterações até que o novo valor de x ultrapasse o limite $x_L = 3$ (arbitrariamente escolhido) e daí cresça rapidamente. Entretanto, tomando-se $x_0 = 2,1$ como valor inicial, apenas duas iterações são suficientes para ultrapassar o mesmo limite. Quanto mais próximo do valor crítico $x = 2$ estiver o valor inicial, maior vai ser o número de iterações necessárias para ultrapassar um limite predeterminado.

Em vez de estudar a evolução dinâmica do mapa fixando um valor para o parâmetro C e testando diferentes valores iniciais de x , como no parágrafo anterior, vamos adotar uma postura alternativa. Vamos partir sempre do mesmo valor inicial — por exemplo $x_0 = 0$, e testar a evolução dinâmica para diferentes valores do parâmetro C . O teste, no entanto, será o mesmo: a contagem do número de iterações necessárias até se ultrapassar o limite arbitrário (vamos continuar com $x_L = 3$).

O leitor notará que qualquer valor do parâmetro C entre $-1/4$ e 2 dá origem a um comportamento confinado, em que os valores sucessivos de x jamais crescem indefinidamente. Fora desse intervalo, porém, ocorre o contrário: para $C = 2,000001$, por exemplo, 12 iterações são necessárias para se ultrapassar o limite $x_L = 3$, enquanto para $C = 2,1$ apenas três iterações bastam. Novamente vemos que quanto mais próximo de 2 estiver o parâmetro C , maior será este número.

OS EFEITOS DA DESCONTINUIDADE

FOTOS PEDRO OSWALDO CRUZ



FIGURAS 3, 4 e 5. Cortes planos do mesmo espaço da figura anterior, em outras direções. Detalhes cada vez mais ampliados são mostrados em seqüência, indicando a propriedade de invariância por transformação de escala (ampliação).

O mais simples protótipo de caos determinístico é caracterizado pela equação

$$x_{t+1} = 1 - ax_t^2 \quad 1$$

a qual, embora possa não parecer para o leitor menos familiarizado com a matemática, é equivalente à equação (5) do texto principal.

Nesta equação, a é um número real (por exemplo, $a = 1,5$), que é mantido fixo, e a equação é aplicada de modo iterativo ($t = 1, 2, 3, \dots$), começando por x_0 (por exemplo, $x_0 = 0,5$) até o atrator x_∞ ser atingido. A dependência de x_∞ como a é mostrada na figura deste box. Variando-se o parâmetro externo a , o sistema apresentará uma cascata de bifurcações com período crescendo com 2^n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Do valor a em diante ($a > a^*$) é observado o caos, isto é, o atrator torna-se infinitamente grande e verifica-se sensibilidade às condições iniciais (valores iniciais x_0 e x'_0 levemente diferentes conduzem a evoluções temporais completamente distintas, as sucessivas imagens temporais x_t e x'_t diferindo erráticamente entre si). Merece atenção o fato de que para $a > a^*$ continuam a existir, muito misturadas com as regiões caóticas, janelas de atratores finitos (por exemplo, vemos no gráfico que para $a \approx 1,8$ o atrator é um ciclo de período 3).

A rota para o caos associada à equação (1) é chamada *rota das bifurcações*, e foi muito estudada por M. J. Feigenbaum e também por P. Coulet e C. Tresser. Em particular, foi mostrado que existem muitas constantes universais associadas à árvore de bifurcações do mapa (1) deste box. Esta rota ao caos não está restrita à equação (1), mas pode ser apresentada por outras equações, desde que elas compartilhem algumas poucas propriedades matemáticas (por exemplo, o fato de terem um único máximo). Todas estas propriedades do mapa quadrático aqui descritas (seqüências de bifurcação de período, janelas de atratores finitos, constantes universais etc.) têm sido medidas em muitos experimentos, numa grande variedade de sistemas físicos: hidrodinâmicos (água, hélio, mercúrio líquido), ópticos (*lasers*), acústicos, eletrônicos, biológicos e químicos, entre outros.

A equação (1) deste box pode ser generalizada, com a introdução de uma descontinuidade, isto é:

$$x_{t+1} = \begin{cases} 1 - \epsilon - ax_t^2 & \text{se } x > 0 \\ 1 - ax_t^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad 2$$

Nesta equação, ϵ é um número real (por exemplo, $\epsilon = 0,1$) que permanece fixo ao longo das iterações, assim como a . A rota para o caos é agora bastante diferente. O caos não é mais atingido através de bifurcações e sim através de seqüências complexas de atratores (incluindo atratores infinitamente grandes). A dependência destes atratores com a e ϵ é mostrada na figura 3 do texto principal, que chamaremos de *penca de peixes* e que apresenta uma estrutura fractal, isto é, invariante por escala. A figura 4 mostra um detalhe ampliado da figura 3, enquanto a figura 5 mostra um detalhe mais ampliado ainda da própria figura 4. Apesar de diferir da rota das bifurcações em vários aspectos, pode ser que a rota da descontinuidade venha também a apresentar comportamentos universais. Merece destaque o fato de poder apresentar mais de um atrator finito para a e ϵ fixos. Isto pode gerar o fenômeno da *histerese*. Num experimento recente, com gotas d'água pingando, observou-se a existência desse fenômeno. No experimento, abre-se a torneira até um determinado ponto, e depois de algum tempo mede-se a freqüência com que as gotas caem (medida que caracteriza o atrator deste sistema). Abre-se então um pouco mais a torneira e depois de alguns instantes volta-se à posição anterior. Ao medir-se agora a freqüência da queda das gotas d'água, verifica-se que ela não coincide necessariamente com a primeira medida, isto é, o sistema pode acabar num outro atrator (agora os pingos têm outra freqüência), mesmo com a torneira presumivelmente na posição inicial (ou seja, com os parâmetros externos fixados nos mesmos valores iniciais). Os autores desse trabalho se propõem atualmente a verificar se a causa da histerese tem ligação com a rota da descontinuidade.

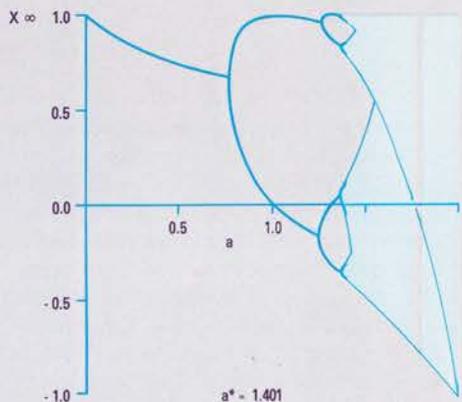
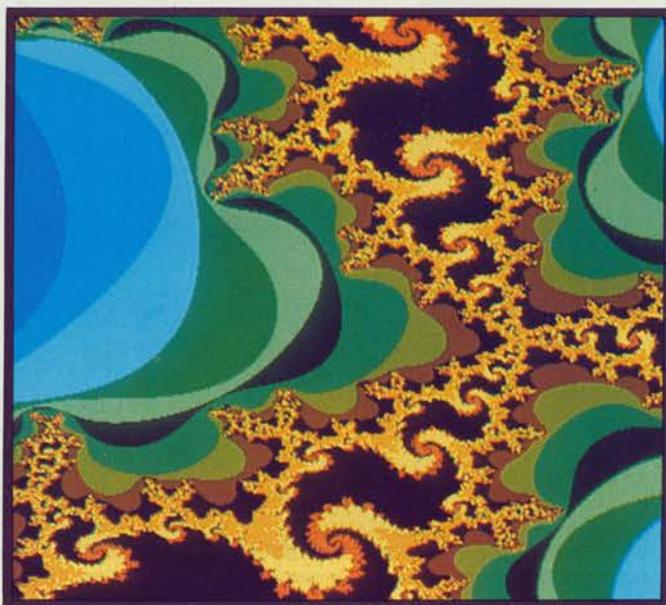
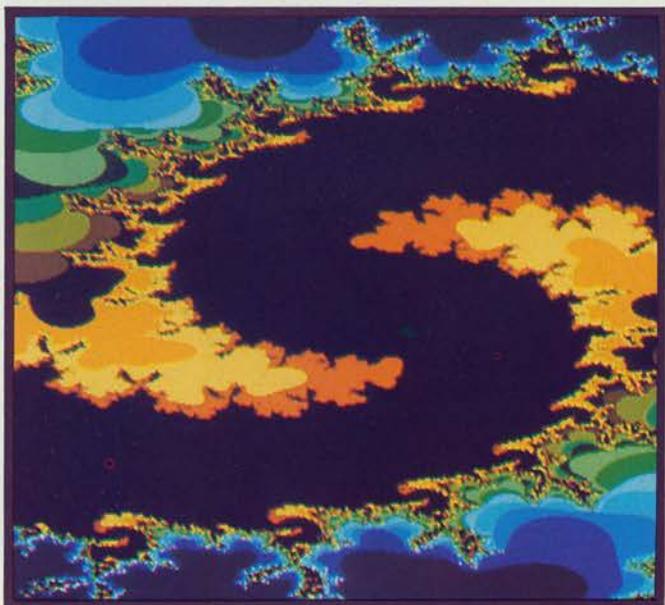
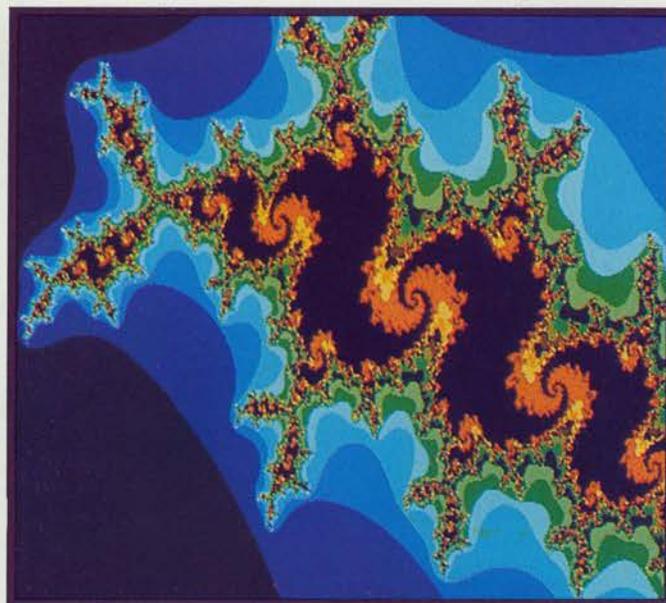
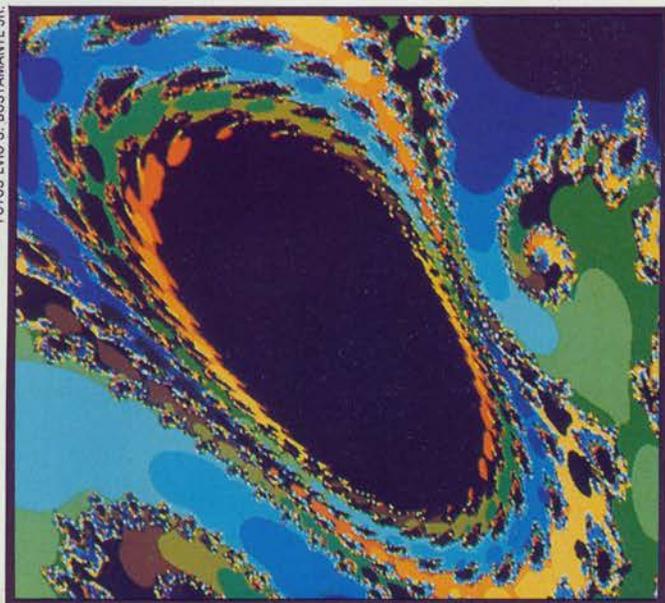


Gráfico representando o atrator da equação quadrática em função do parâmetro de controle a . Para pequenos valores de a o comportamento dinâmico a longo prazo é simples, e o atrator é um único valor de x . Aumentando a , entretanto, o atrator passa a ser um conjunto de dois valores de x que se repetem alternadamente. Aumentando mais ainda o valor de a , o atrator se bifurca numa seqüência de quatro valores de x que se repete periodicamente no tempo. Com esforço visual, o leitor poderá ainda perceber nova bifurcação até o valor crítico a^* , a partir do qual observam-se seqüências infinitas aperiódicas. É o caos.



FIGURAS 6, 7, 8 e 9. Seqüência de detalhes tomados com ampliações crescentes do mesmo corte apresentado na figura 2.

Uma maneira interessante de indicar tal fato é colorir o eixo dos valores de C , associando uma cor diferente a cada número de iterações. Desta forma, a região entre $C = -1/4$ e $C = 2$ terá toda ela a mesma cor, digamos preta, uma vez que neste caso o limite x_L nunca vai ser atingido, mesmo após infinitas iterações. Na região dos valores de C próximos e maiores que 2, no entanto, haverá um verdadeiro arco-íris, contendo um número infinito de cores diferentes em pontos infinitamente próximos entre si. O mesmo fenômeno ocorre para valores de C próximos e menores que $-1/4$. Na prática, esse arco-íris será visualizado na tela de um computador, onde uma reta colorida ponto a ponto representa o eixo varrido pelos valores de C .

Uma interessante generalização do mapa de Feigenbaum é obtida considerando os valores tanto da variável dinâmica x quanto do parâmetro de controle C como *números complexos*, em vez de números reais ordinários. A única informação que o leitor não familiarizado necessita saber é que o domínio desses números complexos é um plano, em vez de uma reta.

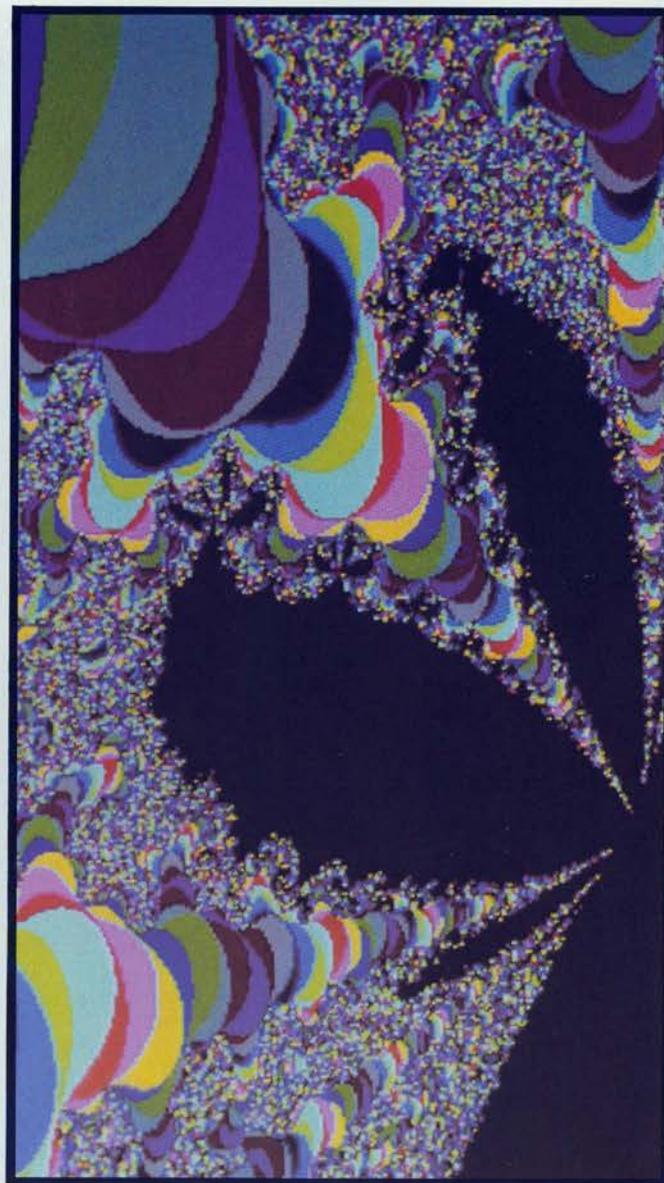
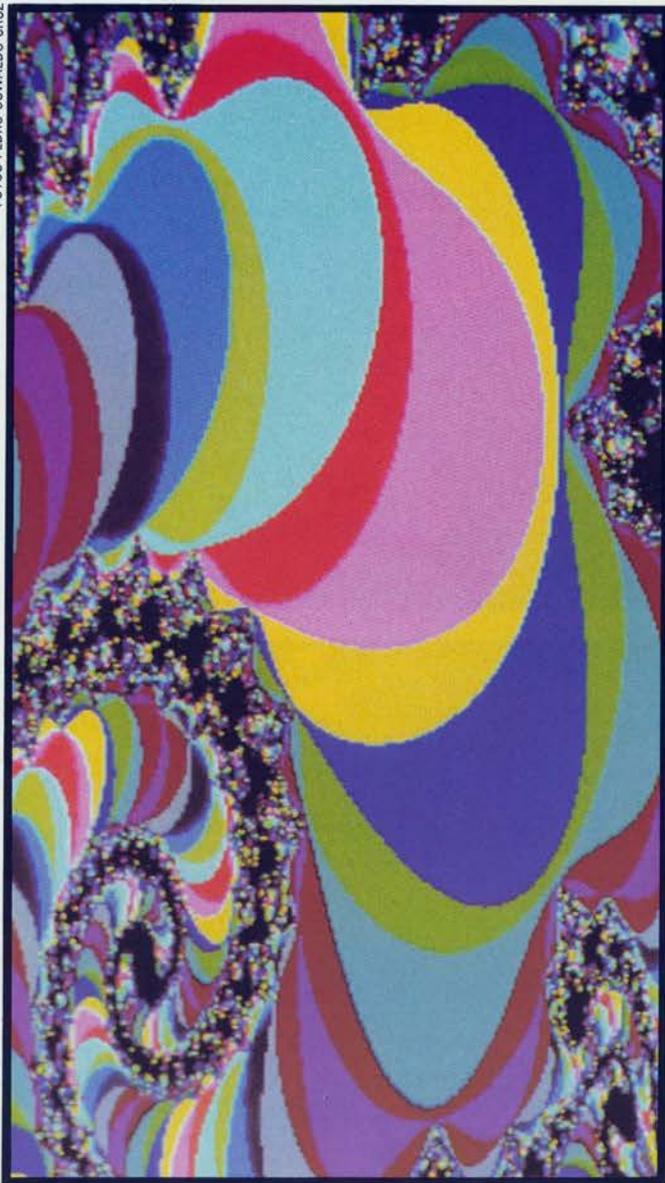
O número complexo C agora varre toda a tela plana do computador, em vez de apenas uma reta. A figura 1 foi fotografada diretamente da tela e é chamada de *figura de Mandelbrot*, em homenagem ao matemático francês Benoit Mandelbrot, que estudou o conceito de fractais (e cunhou o termo 'fractal'). Talvez este seja o fractal mais conhecido do grande público. Ampliando detalhes da figura para pequenas

regiões do plano varrido pelo número C , podemos observar figuras fascinantes. Com o auxílio do computador, aumentando a precisão numérica de C , pode-se chegar a altíssimos graus de ampliação, inimagináveis num processo normal de ampliação fotográfica a partir do original. Lindas fotos obtidas dessa forma, a partir do mapa quadrático, têm sido constantemente divulgadas na imprensa.

Uma outra generalização também interessante do mapa de Feigenbaum foi estudada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) por M.C. Sousa Vieira, E. Lazo e C. Tsallis, introduzindo uma descontinuidade em $x = 0$, ou seja, por exemplo:

$$x_{t+1} = x_t^2 - C + \epsilon \frac{x}{|x|} \quad 6$$

onde ϵ é um novo parâmetro que contro-



FIGURAS 10 e 11. Detalhes diversos obtidos da mesma equação quadrática com descontinuidade.

x, c	$\epsilon = 0$	$\epsilon \neq 0$
reais	FEIGENBAUM D = 1	*V.L.T. (CBPF) D = 2
complexos	MANDELBROT D = 2	ESTE TEXTO D = 3

* Vieira, Lazo e Tsallis

FIGURA 12. A tabela representa o mapa quadrático estudado por Feigenbaum e suas generalizações tratadas neste texto. D representa a dimensão do espaço de parâmetros em cada caso.

la a descontinuidade, e $|x| \leq \epsilon$ o valor absoluto de x , sempre positivo. Para valores reais de C e ϵ , os pesquisadores do CBPF descobriram que o comportamento também se torna caótico para valores não-nulos de ϵ , mas de forma diferente do caso de Feigenbaum, que corresponde a $\epsilon = 0$.

Todas as demais fotos mostradas neste trabalho (com exceção da figura de Mandelbrot) referem-se a uma terceira generalização, que engloba as duas citadas anteriormente: os valores de x e C são novamente complexos e a descontinuidade medida pelo parâmetro real ϵ é também incluída. O espaço de parâmetros de controle agora é tridimensional, uma vez que C ocupa duas dimensões (um plano) e ϵ , uma terceira. Todas as fotos representam cortes planos deste espaço. A figura 2, por exemplo, representa o tipo de corte obtido se fixarmos $\epsilon = 0,1$ ao invés de $\epsilon = 0$, que reproduziria a figura de Mandelbrot. As demais são detalhes desta, ou representam outros cortes planos.

Para concluir, podemos dizer que nesta área de caos a verdade — utopia da Ciência — e a beleza — utopia da Arte — unificam-se numa realidade só!

SUGESTÕES PARA LEITURA

- DEWDNEY A.K., *Scientific American*, agosto 1985, p. 8; setembro 1986, p. 14; dezembro 1986, p. 14; julho 1987, p. 90; novembro 1987, p. 118; fevereiro 1989, p. 88; julho 1989, p. 92; maio 1990, p. 90.
- CRUTCHFIELD J.P., FARMER J.D., PACKARD N.H. & SHAW R.S., *Scientific American*, dezembro 1986, p. 38.
- DIENER F. & DIENER M., *La Recherche*, janeiro 1989, p. 68.
- HÉNON M., *La Recherche*, abril 1989, p. 490.
- GOLDBERGER A.L., RIGNEY D.R. & WEST B.J., *Scientific American*, fevereiro 1990, p. 34.
- JÜRGENS H., PEITGEN H.O. & SAUPE D., *Scientific American*, agosto 1990, p. 40.
- PEITGEN H.O. & RICHTER P.H., *The beauty of fractals*, Springer-Verlag, 1986.

A NATUREZA

**TRABALHANDO
PELA SUA EMPRESA
24 HORAS POR DIA,
INCLUSIVE SÁBADOS,
DOMINGOS
E FERIADOS.**

Seja qual for o seu
negócio, lá está ela,
garantindo a
existência da sua
empresa, dando

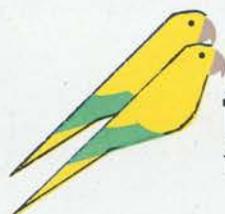
água, ar, energia, solo,
minerais e muito mais.
Ela trabalha sem
cessar e a única coisa
que pede é que você

também a ajude a
sobreviver, restituindo
um pouco do
muito que ela lhe dá.
Pois então, ligue ou

escreva hoje mesmo
para a FUNATURA
e saiba como
sua empresa pode
participar.

FUNATURA - Fundação Pró-Natureza - é uma organização não governamental, sem fins lucrativos, com sede em Brasília. Criada em 1986, sem vinculação político-partidária ou religiosa. Seu principal objetivo é lutar pela preservação dos recursos naturais.

EM LEGÍTIMA DEFESA DA NATUREZA.



funatura
fundação pró-natureza

CAOS NA

REPRODUÇÃO JOÃO CARLOS HORTA



'Wings of light', Matta (*La Dance de L'Univers*, Marie-Simone Detoef, GLACS, Paris, 1986).

MECÂNICA QUÂNTICA?

Na virada deste século, desencadearam-se duas grandes revoluções no tranqüilo mundo da física: a teoria da relatividade e a mecânica quântica. Einstein é uma figura central em ambos os eventos, enquanto Poincaré é lembrado só como um dos precursores da relatividade. Entretanto, os trabalhos desse matemático francês dedicados à mecânica clássica geraram *os sistemas dinâmicos*. Essa nova linha de pesquisas matemáticas passou a afetar profundamente diversas áreas da física a partir dos anos 60.

As disparidades conceituais entre a mecânica clássica e a quântica praticamente impossibilitam uma comparação entre elas. Sendo assim, as propriedades que distinguem o movimento caótico do movimento regular, na mecânica clássica, não têm correspondentes quânticos legítimos. As linguagens das duas teorias são tão diferentes que não podemos sequer discutir o título deste artigo antes de criar os rudimentos de um dicionário bilíngüe clássico/quântico. É o que faremos na primeira parte do trabalho.

Na segunda parte, enfrentaremos uma outra barreira: a maioria dos trabalhos em sistemas dinâmicos trata de *sistemas dissipativos*; enquanto a mecânica quântica se aplica a sistemas muito peculiares: *os sistemas conservativos*. Na terceira parte, descrevemos a quebra de regularidade e o surgimento de órbitas caóticas em sistemas conservativos simples para, então, na seção final, tecer algumas considerações a respeito da mecânica quântica correspondente.

As dificuldades conceituais intrínsecas a essa tentativa de divulgação levaram-me a simplificar ao máximo a exposição, embora as idéias básicas sobre caos em mecânica quântica tenham sobrevivido.

Alfredo M. Ozorio de Almeida

Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas

MECÂNICA CLÁSSICA VERSUS MECÂNICA QUÂNTICA

A mecânica clássica trata dos movimentos causados por forças, de acordo com a segunda lei de Newton ($F = m \cdot a$). Sendo a força proporcional à aceleração, não basta conhecer a posição inicial do corpo em questão para definir seu movimento futuro: temos que conhecer também a sua velocidade. Tratando-se do movimento retilíneo de uma partícula, podemos representar o seu movimento, a sua órbita, por meio de uma curva no chamado *espaço de fases*, onde um eixo representa a posição x e outro eixo representa a velocidade v (figura 1). As duas órbitas esboçadas na figura passam pela mesma posição x_0 . Contudo, só existe uma única órbita passando por cada ponto do espaço de fases.

No caso de uma partícula movendo-se no plano, sua posição será descrita pelas variáveis x e y e seu movimento será determinado por mais duas velocidades, v_x e v_y . Portanto, nesse caso, o espaço de fases terá quatro dimensões. Um corpo rígido é perfeitamente determinado por três coordenadas de seu centro de massa e mais três ângulos que fornecem sua orientação no espaço. Juntando-se, então, mais seis velocidades, teremos um espaço de fases de 12 dimensões. Embora não dê para visualizar esses espaços, expressamos geometricamente o determinismo da mecânica clássica considerando que, mesmo nesses casos, cada ponto do espaço de fases representa um único 'estado' possível do sistema dinâmico e o movimento futuro do corpo corresponde a uma curva nesse espaço.

Em relação à mecânica quântica, a dinâmica clássica é considerada hoje apenas uma aproximação. Não podemos conhecer exatamente, por meio dela, as variáveis que determinaríamos o seu estado clássico. De acordo com o princípio de incerteza de Heisenberg, o conhecimento exato da posição não é compatível com o conhecimento exato

da velocidade. Mais precisamente: se medirmos a posição x de uma partícula de massa m com uma tolerância Δx e a velocidade v com a tolerância Δv , o seu produto é dado no mínimo por:

$$\Delta x \Delta v \geq \frac{\hbar}{2m} \quad 1$$

Entendemos por 'tolerância' a incerteza experimental obtida ao se medir o valor de uma variável física.

Na teoria quântica, a *constante de Planck* (\hbar) é uma das constantes fundamentais da natureza, como a constante gravitacional, a carga do elétron e a velocidade da luz. Verificamos que, de fato, as tolerâncias Δv e Δx podem ser muito pequenas se a massa m for muito grande. No movimento de um planeta em torno do Sol, por exemplo, essa restrição da mecânica quântica não se faz sentir, de maneira que podemos usar as equações mais simples da mecânica clássica nesse caso. O mesmo ocorre em relação ao movimento de objetos na escala humana, como uma bola de bilhar. Só no nível de fenômenos microscópicos, como o movimento dos elétrons numa molécula, é que as duas teorias fornecem resultados significativamente diferentes.

Entretanto, podemos entender algo do princípio da incerteza, mesmo dentro do contexto da mecânica clássica. Basta considerar a impossibilidade de determinar com precisão o estado inicial de um sistema. De fato, este é o enfoque que permite falar em movimento caótico num sistema perfeitamente determinista. Estipulamos então que, inicialmente, o sistema é especificado apenas com uma certa probabilidade no espaço de fases.

Para tornar a idéia mais clara, vamos examinar o movimento retilíneo de uma partícula, sabendo que inicialmente ela tem 80% de probabilidade de ser encontrada no espaço de fases dentro de uma bolinha de raio $\Delta v_1 = \Delta x_1 = \hbar/(2m)$, como mos-

tra a figura 2. As órbitas clássicas levam este círculo centrado em (x_1, v_1) a uma outra curva fechada em torno do ponto (x_2, v_2) . O perfeito determinismo da mecânica clássica especifica que teremos então a mesma probabilidade de 80% de encontrar o sistema dentro desta nova curva. Melhor ainda: de acordo com o *teorema de Liouville*, os volumes, ou, neste caso, as áreas de curvas fechadas, são preservados pelo movimento. Logo, a elipse aproximada da figura pode ter $\Delta x_2 \neq \Delta x_1$ e $\Delta v_2 \neq \Delta v_1$, mas terá necessariamente $\Delta x_2 \Delta v_2 = \Delta x_1 \Delta v_1$. Em poucas palavras, uma vez admitida a incerteza inicial, o produto que aparece no princípio da incerteza não pode ser reduzido. No caso da mecânica quântica, essas incertezas podem ser representadas por distribuições no espaço de fase (ver 'Funções de Wigner e de Husimi').

FORÇAS CONSERVATIVAS E DISSIPATIVAS

Existem manifestações fascinantes de fenômenos puramente quânticos em nível macroscópico. É o caso da supercondutividade eletrônica de metais e cerâmicas, cujo estudo está em franca efervescência. Temos aí, entretanto, uma situação em que muitas partículas — no caso, elétrons — agem como se fossem poucas: é um fenômeno microscópico amplificado!

Em geral, a natureza quântica do movimento só é detectável em sistemas microscópicos, cujas partículas interagem por meio de forças fundamentais, como a força eletromagnética. Tomemos o 'contra-exemplo' macroscópico de uma caixa que empurramos pelo chão. Se deixamos de empurrá-la, ela pára. Entretanto, segundo o princípio de inércia formulado por Galileu, ela manteria uma velocidade uniforme v e conservaria sua energia cinética ($1/2 mv^2$) se outra força — a força de fricção — não interferisse. Esta força, cuja

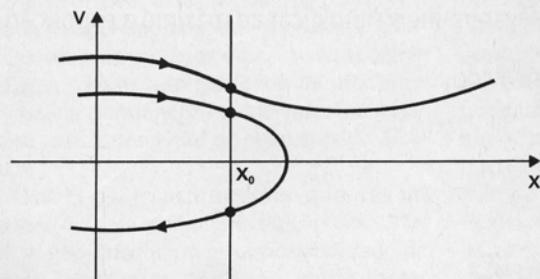


FIGURA 1. **Órbitas no espaço de fases.** Mesmo em movimentos retilíneos simples, uma partícula pode ter muitas velocidades ao passar por uma posição x_0 . Compomos o espaço de fases atribuindo a cada uma dessas velocidades um ponto na reta vertical que passa por x_0 . Assim, as órbitas possíveis da partícula constituem curvas no espaço de fases. Por cada ponto desse espaço passa uma única órbita.

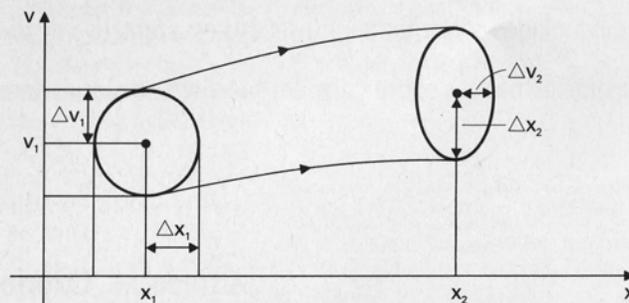


FIGURA 2. **Princípio de incerteza.** Na prática, nunca podemos precisar absolutamente a posição x e a velocidade v de uma partícula. Se sabemos que ela está dentro de uma bolinha do espaço de fases centrada no ponto (x_1, v_1) , teremos igual certeza de que ela estará dentro da curva na qual as órbitas levam essa bolinha depois de algum tempo. De acordo com a mecânica clássica, a área dessa curva é invariante no tempo, mas não existiria limite inferior para o seu tamanho inicial. O princípio de incerteza da mecânica quântica impede que a bolinha seja arbitrariamente pequena.

FUNÇÕES DE WIGNER E DE HUSIMI

As incertezas nas posições e nas velocidades das partículas de um sistema quântico podem ser representadas por distribuições no espaço de fases. Essas distribuições são conhecidas como funções de Wigner. A diferença entre a mecânica clássica e a mecânica quântica se manifesta no fato de que a função de Wigner pode ser negativa, o que a impede de representar uma probabilidade clássica, que é sempre positiva. Mesmo assim, projeções da função de Wigner nas posições dão realmente a probabilidade de encontrar o sistema numa determinada região, e suas projeções no eixo das velocidades também são diretamente interpretáveis.

Podemos também suavizar localmente a função de Wigner, obtendo a função de Husimi, que se comporta quase como a probabilidade clássica descrita anteriormente. Assim, o estado quântico de incerteza mínima, conhecido como estado coerente, tem uma representação de Husimi bem parecida com a descrição clássica.

A enorme separação entre a mecânica clássica e a quântica evidencia-se por fenômenos de interferência. Consideremos por exemplo uma partícula de massa m que se movimenta inicialmente dentro de uma caixa de comprimento l com velocidade v_0 . Após um choque elástico com a parede, ela terá velocidade v_0 e aí $-v_0$ de novo... Se não conhecermos a sua posição inicial dentro da caixa, teremos $1/2$ de probabilidade de encontrá-la com velocidade v_0 e $1/2$ de achá-la com velocidade $-v_0$. A probabilidade de que esteja num certo intervalo de posição Δx será $\Delta x/l$. Passando para o espaço de fases, damos à partícula simplesmente a probabilidade $1/2$ de estar uniformemente distribuída no segmento de reta superior da figura 3 e $1/2$ de estar no segmento inferior. Obtemos as probabilidades para Δv ou Δx em separado, projetando as probabilidades no espaço de fases sobre o eixo v ou sobre o eixo x .

A função de Husimi para o problema ilustrado na figura 3 será muito parecida com a distribuição clássica. Entretanto, não é a projeção desta distribuição que dará as probabilidades em x e em v_0 , de acordo com a mecânica quântica. Precisamos, para isso, conhecer a função de Wigner, na qual consta um novo termo oscilatório proporcional a $\cos(2v_0x/\hbar m)$ ao longo do eixo dos x . Verificamos assim que a função de Wigner toma valores negativos. Projetando-a sobre o eixo v , este termo não contribui, porque as contribuições das oscilações negativas cancelam as contribuições positivas à projeção. Já a probabilidade em x fica completamente alterada por esse termo de interferência: haverá posições nas quais a probabilidade de encontrar a partícula clássica será nula, enquanto em outras teremos o dobro de probabilidades de encontrá-la!

O único refinamento que ainda temos de adicionar a este cenário é que o princípio de incerteza não permite localizar exatamente as velocidades (v_0) e ($-v_0$), já que sabemos que Δx é menor ou igual ao comprimento da caixa. Porém, se o quociente (\hbar/m) for bem menor do que l , teremos picos bem precisos sobre os segmentos $v = v_0$, $v = -v_0$ das funções de Husimi e de Wigner, ao passo que esta última também terá picos oscilatórios sobre $v = 0$. A figura 4 mostra curvas de nível das funções de Husimi e de Wigner para este sistema.

No limite clássico de massas grandes, teremos (\hbar/m) muito menor do que l . Neste caso, o termo de interferência da função de Wigner terá muitas oscilações para qualquer tolerância Δx com que poderíamos medir a posição da partícula. Será então impossível detectar o caráter quântico do nosso sistema.

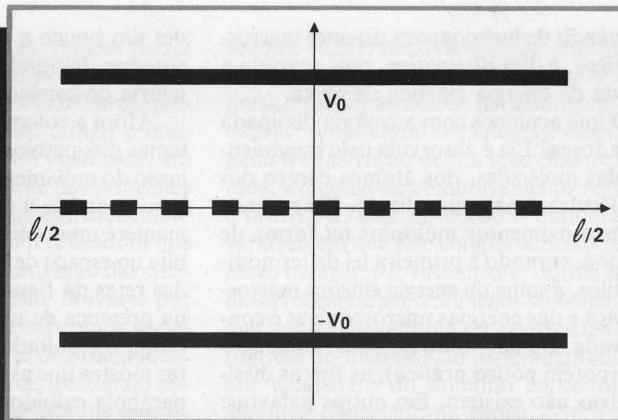


FIGURA 3. Uma partícula colidindo elasticamente com uma caixa de comprimento l terá $1/2$ de probabilidade de ter velocidade v_0 e $1/2$ de probabilidade de ter velocidade $-v_0$. Por isso, a função de Husimi estará concentrada nos segmentos horizontais correspondentes a (v_0) e ($-v_0$). A função de Wigner exibe a interferência quântica como um termo oscilatório adicional ao longo do eixo dos x .

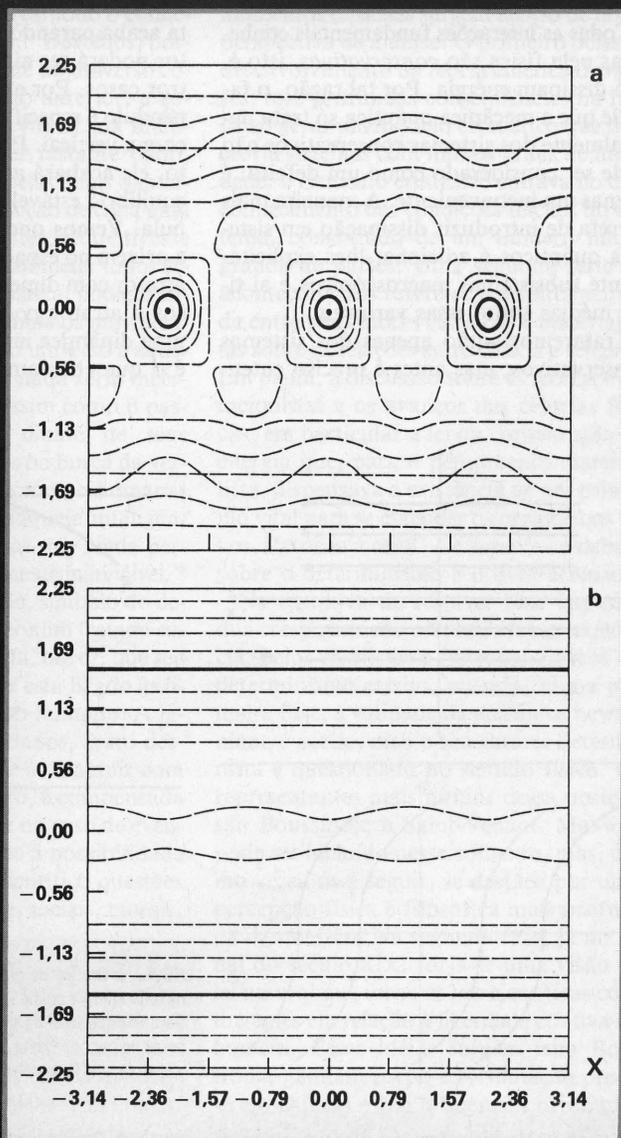


FIGURA 4. (a) O princípio da incerteza espalha a função de Wigner para fora das retas $v = 0$ e $v = \pm v_0$. Os picos das oscilações, ao longo do eixo dos x , aparecem como pontos cercados de curvas concêntricas. (b) A função de Husimi apaga as oscilações no eixo dos x de modo a reproduzir aproximadamente a probabilidade clássica no espaço de fases.

existência deduzimos para sistemas macroscópicos, é dita *dissipativa*, pois acarreta a perda da energia cinética da caixa.

O que acontece com a energia dissipada pela força? Ela é absorvida pelo movimento das moléculas, dos átomos dentro das moléculas e assim por diante. Detectamos esses movimentos múltiplos na forma de calor e, segundo a primeira lei da termodinâmica, a soma da energia cinética macroscópica e das energias microscópicas é conservada. De um ponto de vista fundamental (porém pouco prático), as forças dissipativas não existem. Em outras palavras: a energia só parece sumir quando simplificamos nossa representação conceitual do sistema macroscópico, de forma a ignorar interações complexas entre os elementos. Vista assim, a dissipação é a energia que varremos para baixo do tapete!

Todas as interações fundamentais conhecidas pela física são *conservativas*, isto é, não dissipam energia. Por tal razão, o fato de que a mecânica quântica só trata naturalmente dos sistemas conservativos não pode ser considerado como um defeito: é apenas um inconveniente. A maneira mais correta de introduzir dissipação em sistemas quânticos é adicionar-lhes explicitamente subsistemas macroscópicos e aí tirar médias sobre essas variáveis.

Trataremos então apenas dos sistemas conservativos, mas antes é preciso enten-

der um pouco a diferença entre eles e os sistemas dissipativos, no contexto da geometria do espaço de fases.

Afora a conservação da energia, os sistemas dissipativos se caracterizam pelo colapso do movimento em 'atratores'. Se não houver atrito, a caixa, ao ser empurrada, manterá uma velocidade constante. Sua órbita no espaço de fases será, portanto, uma das retas da figura 5a. No caso concreto, na presença de uma força de atrito constante, o resultado de um cálculo elemental mostra que as órbitas serão os arcos de parábola exibidos na figura 5b.

No primeiro caso, todas as órbitas situam-se em *curvas invariantes* (no exemplo, retas horizontais), enquanto no segundo caso as órbitas caem num atrator (no exemplo, o eixo $v = 0$), pois, qualquer que seja a velocidade inicial imprimida à caixa, esta acaba parando em algum lugar. O atrator poderá ser ainda mais simples em outros casos. Por exemplo, a posição de um pêndulo é especificada pelo ângulo que faz com a vertical. Por menor que seja o atrito, ele acabará atingindo uma posição de equilíbrio estável, com velocidade angular nula. Vemos que, neste caso, o atrator é a origem no espaço de fase; trata-se de um atrator com dimensão nula. Em outros casos o atrator poderá ter uma estrutura e uma dinâmica interna muito complexa — é o que chamamos de 'atrator estranho'.

O leitor atento terá percebido uma contradição entre o exposto acima e o teorema de Liouville citado anteriormente. De fato, se desenharmos um círculo em torno da origem do espaço de fases do pêndulo, este entrará em colapso num único ponto: a origem, que representa o sistema parado, em equilíbrio. É preciso, portanto, esclarecer que esse teorema, que determina a preservação de áreas ou volumes no espaço de fases, refere-se exclusivamente a sistemas que conservam a energia. Verificamos, de imediato, a dificuldade em conceber uma mecânica quântica incluindo a dissipação: esta característica destrói a incerteza clássica, ao passo que qualquer teoria quântica trará embutido o princípio da incerteza.

SISTEMAS CONSERVATIVOS CLÁSSICOS

Os sistemas conservativos mais simples descrevem o movimento retilíneo de uma partícula sujeita a uma força independente do tempo e da velocidade. Sua energia conservada E tem uma parte cinética ($1/2 mv^2$) e uma parte potencial $V(x)$ determinada pela natureza da força. Obtemos, então, suas órbitas no espaço de fases pela equação da conservação da energia:

$$1/2 mv^2 + V(x) = E$$

2

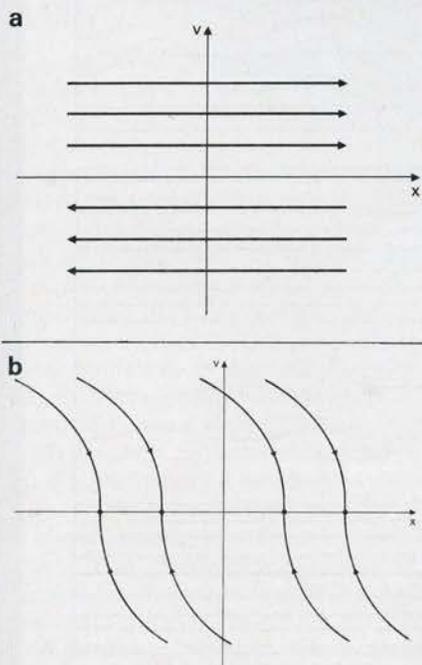


FIGURA 5. (a) Movimento livre sem atrito tem velocidade constante. As órbitas são retas horizontais no espaço de fases. Estas são exemplos de curva invariante. (b) Adicionando uma força de atrito constante, todas as órbitas terminam no eixo dos x , um atrator, pois o movimento cessa, seja qual for a velocidade inicial.

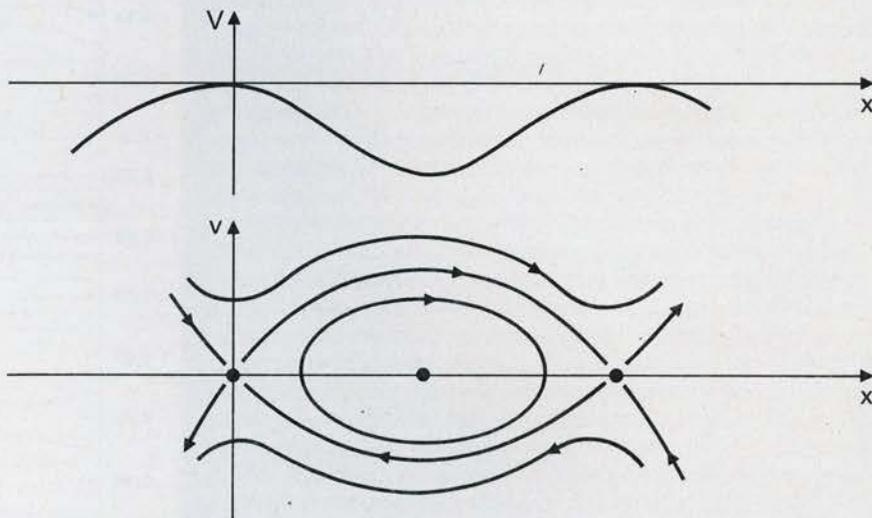
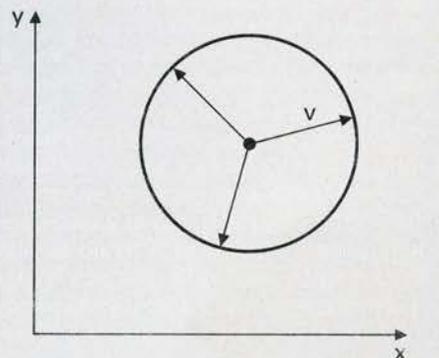


FIGURA 6. Gráfico de energia potencial com dois máximos de energia nula e um mínimo de energia negativa. Se a energia total da partícula for negativa, ela estará presa no poço: a órbita é a curva invariante fechada. Se a energia total for positiva, a órbita será uma curva aberta.

FIGURA 7. A conservação de energia determina apenas o módulo da velocidade em cada ponto (x, y) . Em princípio, a partícula poderia ter qualquer direção. Se a órbita estiver presa a um toro invariante, poucas direções serão permitidas.



Isto é: consideramos que esta equação determina implicitamente a curva $v(x)$ no espaço de fases. Na figura 6, vemos órbitas obtidas para energias diferentes, sob o gráfico de energia potencial correspondente, que poderiam ser a de uma bolinha de gude rolando transversalmente sobre uma telha de amianto deitada, ou ainda a do pêndulo, se interpretarmos a coordenada x como o ângulo a partir da vertical.

O mínimo do potencial é um ponto de equilíbrio estável: a órbita é um único ponto e, embora não atraia suas vizinhas na ausência de atrito, estas permanecem sempre próximas. Os máximos de potencial também são pontos de equilíbrio, porém instáveis: quase todas as órbitas vizinhas se afastam deles. As órbitas com energia acima do equilíbrio instável estão soltas, ao passo que as de energia menor descrevem curvas invariantes, porém fechadas, como as da figura 5a. Curvas fechadas têm a mesma topologia dos círculos, por isso as chamamos de *círculos invariantes*. Como o sistema volta sobre si mesmo eternamente, também são chamadas de *órbitas periódicas*.

Nesse sistema simples não existe caos. A presença de círculos invariantes garante que, para uma determinada posição, só existam algumas velocidades $v(x)$ compatíveis com a equação de energia (2). Entretanto, este não é o caso para o movimento

geral num plano (bola de gude em terreno arbitrário, onde $V(x,y)$ é proporcional à altura do relevo). Neste caso temos coordenadas x e y e velocidades v_x e v_y , logo a equação de energia fica assim:

$$1/2 m v_x^2 + 1/2 m v_y^2 + V(x, y) = E \quad 3$$

O fato de a energia ser constante não fornece mais, por si só, as funções $v_x(x,y)$ e $v_y(x,y)$. Só o módulo $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ da velocidade a cada posição (x,y) pode ser inferido. Passando por perto desse ponto, a partícula poderá estar caminhando em qualquer direção, como mostra a figura 7. Isto é, o fato de que esse sistema simples seja conservativo não impede que o movimento seja caótico.

Será que as órbitas de fato aproveitam essa liberdade direcional que a conservação de energia lhes permite? Três séculos após a publicação dos *Princípios matemáticos da filosofia natural*, de Newton (1687), ainda não se encontrou, para as equações da dinâmica clássica, nenhuma solução analítica que exibisse esse tipo de comportamento caótico. Todas as soluções encontradas dão no máximo um número finito de direções para o vetor velocidade. Em outras palavras, as órbitas desses sistemas estão contidas em superfícies $v_x(x,y)$ e $v_y(x,y)$ no espaço de fases. Como essas superfícies têm a topologia de toros (câmara de ar de

pneus), chamamo-las de *toros invariantes* (figura 8). Contudo, tal universalidade de soluções aprisionadas em toros invariantes nunca foi provada; Poincaré conseguiu demonstrar que em alguns casos era impossível embutir a órbita em qualquer superfície invariante.

Hoje em dia, já é possível computar facilmente as órbitas e assim estabelecer suas características. Consideremos primeiro um sistema onde todas as órbitas se desenrolam em toros invariantes. Mesmo aí teremos dois tipos de órbitas — as *órbitas periódicas*, que se fecham exatamente sobre si mesmas, e as abertas. Se cortarmos o toro por uma *seção de Poincaré* [o plano (x, v_x) da figura 8], obtemos um círculo. As órbitas periódicas atravessam a seção num número finito de pontos, enquanto as órbitas abertas vão ocupando o círculo densamente. A figura 9 mostra uma seção de Poincaré de um sistema integrável. Além dos círculos invariantes, vemos também pontos que se assemelham ao ponto de equilíbrio instável do pêndulo visto anteriormente. Esta é a seção de uma órbita periódica instável: ela recorre eternamente, mas as órbitas vizinhas se afastam.

Em geral quebramos essa estrutura adicionando uma pequena força arbitrária ao sistema. Assim, verificamos a existência de um cenário maravilhosamente complexo, com órbitas que marcam claramente cur-

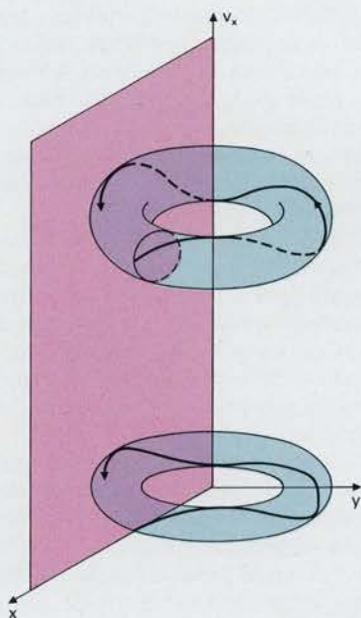


FIGURA 8. Um toro invariante tem a estrutura de uma câmara de ar de pneu. Se cortamos o toro por meio de uma seção de Poincaré, obtemos um círculo invariante. As órbitas que se desenrolam sobre o toro furam repetidamente a seção de Poincaré, sempre sobre o mesmo círculo. A projeção da órbita no plano (x,y) estará contida na projeção do toro, uma região anular.

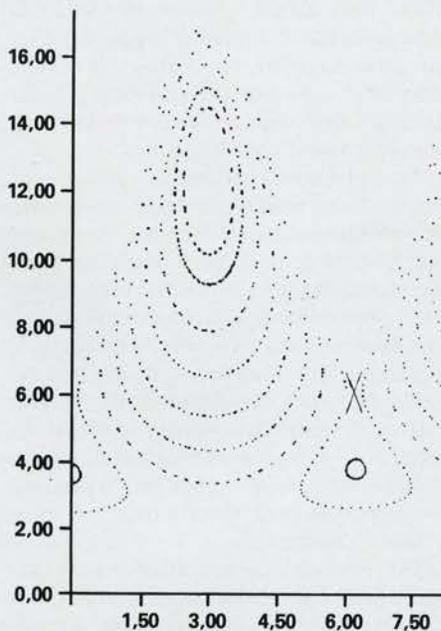


FIGURA 9. Seção de Poincaré de um sistema em que todas as órbitas estão presas a toros. No centro da família de curvas invariantes fechadas (seções de toros invariantes) temos uma órbita periódica estável. O ponto marcado com um X, ao qual curvas invariantes tendem para depois se afastarem, é a seção de uma órbita periódica instável.

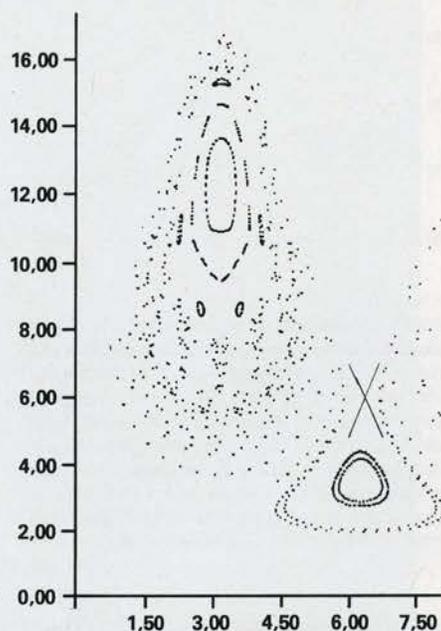


FIGURA 10. Uma força adicional em geral destrói os toros vizinhos à órbita periódica instável. As órbitas caóticas que surgem vão povoar regiões inteiras da seção de Poincaré e, portanto, do espaço de fases.

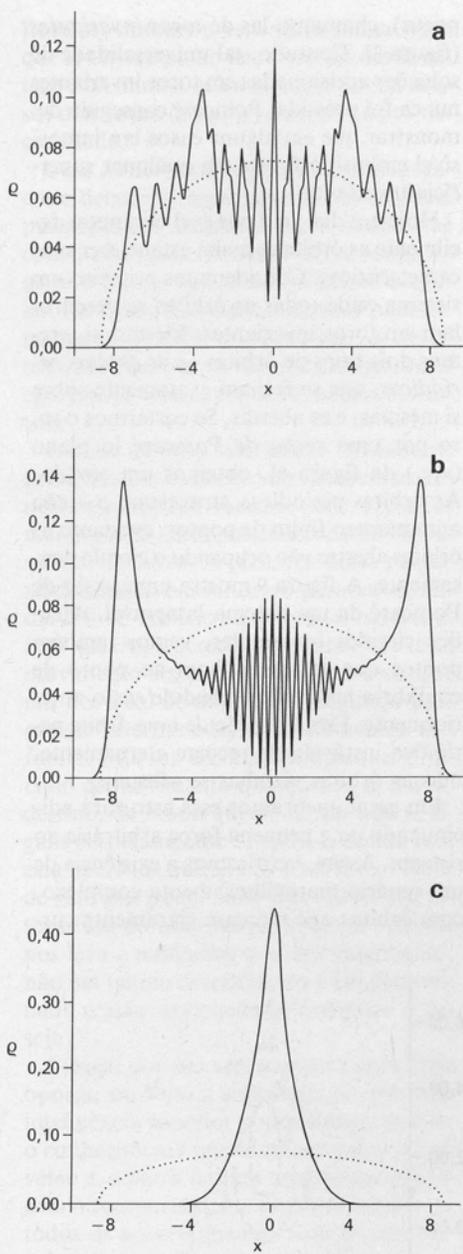


FIGURA 11. Densidades de probabilidades projetadas no eixo dos x para um sistema parcialmente regular e parcialmente caótico. A linha pontilhada dá a densidade prevista pela hipótese de Voros e Berry, para comparação com o resultado da computação numérica. (a) Estado caótico com interferências irregulares superpostas à linha pontilhada. (b) Estado correspondente a um toro clássico, com batimento regular devido à interferência das duas camadas do toro. (c) Estado fortemente cicatrizado pela órbita periódica instável, localizada em $x = 0$.

vas invariantes, entremeadas de órbitas caóticas que povoam regiões inteiras de seção (figura 10). Existe muito ainda para se entender numa figura dessas, para não falar na sua análoga em dimensões maiores. Entretanto, teoremas como o de Kolmogorov, Arnold e Moser levaram a uma visão geral dessas estruturas, muito mais avançada do que a que temos dos sistemas quânticos correspondentes.

É importante entender o que acontece numa região que se torna caótica do ponto de vista das órbitas periódicas. Já vimos que em muitos toros invariantes as órbitas são todas periódicas. A destruição dos toros invariantes acarreta a perda desse alto grau de regularidade em quase todas elas. Mas o *teorema de Poincaré-Birkhoff* estipula a sobrevivência de, no mínimo, um par de órbitas periódicas — uma estável e uma instável — para cada um desses toros. A órbita instável não se altera fundamentalmente se aumentarmos as forças que quebram a integrabilidade do sistema. Já a órbita estável se bifurca, tornando-se instável, mas ao mesmo tempo dando lugar a uma nova órbita estável com o dobro do período. Esta, por sua vez, se bifurca da mesma maneira, e assim por diante, numa seqüência infinita. Tais *cascatas de bifurcação de período* são parcialmente responsáveis pela densa povoação das regiões caóticas por órbitas periódicas porém instáveis. Podemos tentar entender o movimento caótico a partir desse esqueleto regular.

CAOS E QUANTIZAÇÃO

Dizemos que um sistema foi quantizado quando obtemos as equações quânticas para a sua evolução, correspondentes à segunda lei de Newton. Dado que, na mecânica quântica, lidamos com sistemas conservativos, naturalmente procuramos soluções estacionárias, nas quais a função de Wigner e sua projeção, a probabilidade $P(x)$ de encontrar uma partícula em determinada posição, bem como a função de Husimi, não se alterem com o tempo.

Consideremos o problema clássico correspondente para o caso mais simples de movimento em uma dimensão. Vimos que qualquer círculo, como o da figura 2, seria propagado pelas trajetórias contidas nele. A probabilidade clássica se move de forma bem próxima à da função de Husimi; portanto, esse estado coerente não será estacionário. Já a curva fechada da figura 6 não se move quando sujeita às forças do pêndulo. Assim, a probabilidade de encontrarmos o ponto que representa o pêndulo no espaço de fases sobre uma curva invariante é constante.

Podemos obter aproximações muito satisfatórias dos estados estacionários quânticos a partir desta visão clássica. O resultado é que a função de Husimi se identifica com uma distribuição de probabilidade clássica que atinge seu máximo sobre a curva invariante, tal qual no exemplo da partícula dentro da caixa descrita anteriormente. A autoconsistência dessa solução, no entanto, estipula que só certas curvas invariantes podem servir de base para um estado quântico. Se A for a área de uma curva

invariante correspondente a um estado quântico e A' a área de outra curva da mesma família, a *regra de quantização* determina que

$$A' - A = n\hbar \quad 4$$

Como a energia varia em função da área da curva invariante, obtemos energias quantizadas $E = E_1, E_2, \dots, E_n$. No caso do átomo de hidrogênio, obtemos assim as regras de quantização de Bohr, dos primórdios da mecânica quântica.

No caso de um sistema integrável mais complexo, podemos generalizar imediatamente esta teoria. Para isso, basta tomar as áreas permitidas como sendo as áreas das diversas seções de Poincaré dos toros invariantes; assim podemos obter boas aproximações para as energias quantizadas. Já os sistemas com órbitas caóticas derrotaram décadas de esforços para determinar uma simples regra de quantização de energias.

Antes de relatar os esforços e sucessos parciais para entender os estados estacionários dos sistemas caóticos, é bom falar da sua relevância para os estados não estacionários. Embora a mecânica quântica seja em geral mais complexa que a mecânica clássica, ela permite a superposição de estados, para se obterem novos estados. Se superpomos dois estados estacionários, obtemos um estado periódico no tempo. Com a superposição de três estados, temos duas periodicidades; com a superposição de n estados estacionários temos um estado com $n-1$ periodicidades. Podemos, em princípio, obter qualquer estado não estacionário por meio dessas superposições: o resultado será um estado quase periódico, ou seja, muito mais regular do que o movimento caótico clássico.

Por essa razão, podemos agora responder negativamente à questão colocada pelo título deste artigo: os sistemas recorrentes que são classicamente caóticos não o são na mecânica quântica! Infelizmente, ainda não compreendemos direito a maneira fundamental pela qual essas duas descrições divergem.

O que fazer, então, para quantizar sistemas clássicos, na ausência de superfícies invariantes? A *hipótese de Voros e Berry* é a mais simples que podemos testar. Ela diz que “devemos tomar a função de Wigner como sendo uniforme dentro de toda a região do espaço de fases com determinada energia, e como sendo nula fora dele”, pois a partícula clássica, ao passar em cada posição, tem igual probabilidade de tomar qualquer direção, como vimos na figura 7. Embora essa hipótese ignore efeitos de interferência quântica, e por isso seja incapaz de fornecer as energias quantizadas, ela serve pelo menos como pano de fundo,

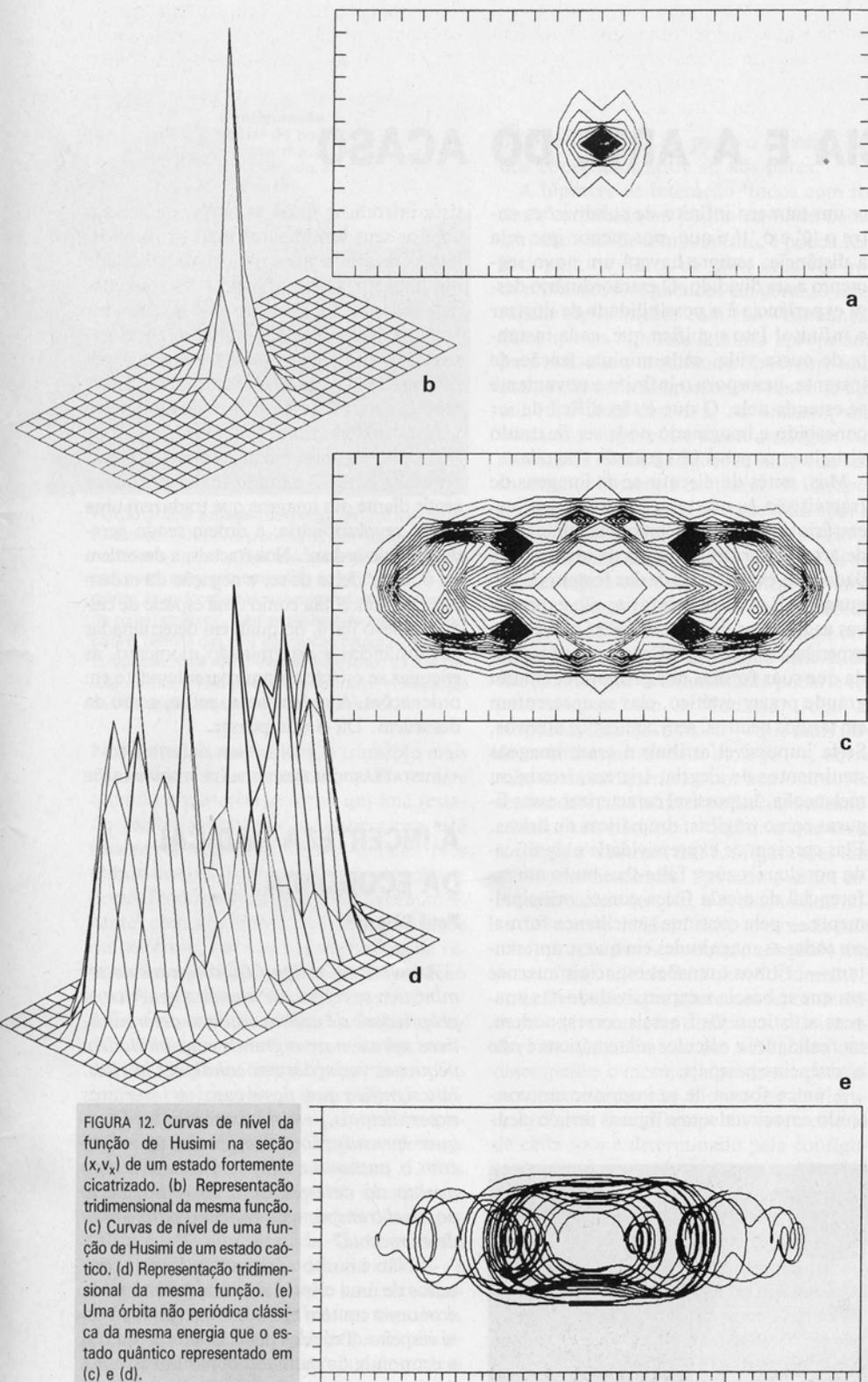


FIGURA 12. Curvas de nível da função de Husimi na seção (x, v_x) de um estado fortemente cicatrizado. (b) Representação tridimensional da mesma função. (c) Curvas de nível de uma função de Husimi de um estado caótico. (d) Representação tridimensional da mesma função. (e) Uma órbita não periódica clássica da mesma energia que o estado quântico representado em (c) e (d).

contra o qual podemos comparar estados computados numericamente.

Na figura 11, vemos projeções da densidade de probabilidades no eixo dos x de um sistema parcialmente regular e parcialmente caótico. A linha pontilhada indica qual seria essa densidade, caso valesse a hipótese de Voros e Berry; a linha inteira foi obtida

por computação numérica. Na figura 11a, vemos que a concordância até que não está má, se tomarmos a linha pontilhada como base para a adição de interferências quânticas. Podemos interpretar a figura 11b como sendo uma função de onda ligada a um toro invariante, que sabemos existir a essa energia. A densidade de probabi-

lidades não tem nenhuma relação com a hipótese de Voros e Berry; a interferência senoidal de densidade indica um simples batimento da projeção das duas camadas do toro.

A figura 11c também mostra uma função de onda completamente fora da hipótese de Voros e Berry. Entretanto, sabemos que, a essa energia, o sistema terá se tornado caótico nas imediações de $x = 0$. A única estrutura invariante que sobrou da família de toros que por lá pairava é uma órbita periódica instável. A descoberta de que sistemas caóticos poderiam ter estados estacionários dominados por uma única órbita periódica instável deve-se a Heller e tem mais de dez anos. Essa marca da órbita periódica é chamada de cicatriz. Na figura 12 vemos funções de Husimi com e sem cicatriz.

Nem todos os estados têm cicatrizes. Podemos entender parcialmente a sua aparição dentro de uma teoria geral que liga estados e energias quantizadas às órbitas periódicas, criada por Gutzwiller, há cerca de 20 anos. A plausibilidade dessa teoria remonta à hipótese de Poincaré, de que mesmo o sistema mais caótico é densamente povoado por órbitas periódicas instáveis. Desta forma, é possível vislumbrar as complexas interferências quânticas de um estado que não exibe uma cicatriz simples como resultante da ação conjunta de muitas órbitas periódicas.

Aqui temos que parar, pois atingimos o limite entre o conhecimento e as conjecturas que orientam a sua busca. A preocupação com a quantização dos sistemas caóticos surgiu com um artigo de Percival há 25 anos. De lá para cá, muitas questões foram esclarecidas, mas problemas básicos permanecem em aberto. Aquela certeza, que remonta ao início da mecânica quântica, de que podemos entender a mecânica clássica como um mero limite da mecânica quântica, permanece de pé para praticamente a totalidade dos físicos. Entretanto, ainda não sabemos como estender a demonstração desse fato dos sistemas regulares para os caóticos.

SUGESTÕES PARA LEITURA

ALMEIDA A.M.O. de, *Sistemas Hamiltonianos: caos e quantização*, Editora da Unicamp, Campinas, 1987.

GLEICK J., *Caos, a construção de uma nova ciência*, Gradiva, Lisboa, 1989.

GUTZWILLER, M.C., 'Quantum Chaos'. *Scientific American*, p. 26, janeiro de 1992.

STEWART I., *Será que Deus joga dados? — A nova matemática do caos*, Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 1991.

A CIÊNCIA E A ARTE DO ACASO

Os avanços recentes da investigação científica trouxeram novos elementos de reflexão sobre os conceitos de ordem e desordem na natureza. Hoje, a noção de caos já permeia várias áreas do conhecimento. A seguir, pesquisadores e artistas falam à *Ciência Hoje* sobre o sentido do determinismo, do acaso e de caos em suas áreas.

UMA POSSIBILIDADE PARA ILUSTRAR O INFINITO

Fayga Ostrower*

As imagens de fractais poderiam ser consideradas como obras de arte?

— Os fractais são representações visuais de equações matemáticas que só podem ser produzidas por computador. Cada um dos milhões de pontinhos que compõem as figuras de fractais representa a solução para muitos cálculos numéricos. É uma tarefa inviável para a mente humana mas de simples resolução para as máquinas modernas, razão por que tais imagens são próprias e características da linguagem do computador.

Nas representações visuais, as figuras de fractais pertencem a uma nova geometria: elas exibem dimensões fracionárias, não inteiras. Mais importante ainda, cada detalhe de uma imagem pode ser ampliado infinitamente, mantendo a forma estrutural do todo e sem perder a precisão. É um exemplo concreto para a idéia de que exis-

te um número infinito de subdivisões entre o '0' e o '1' e que, por menor que seja a distância, sempre haverá um novo segmento a ser dividido. O extraordinário dessa experiência é a possibilidade de ilustrar o infinito! Isto significa que, cada instante de nossa vida, cada mínima fração de instante, incorpora o infinito e novamente se estende nele. O que é tão difícil de ser concebido e imaginado pode ser ilustrado visualmente pelas imagens de fractais.

Mas, antes de discutir se as imagens de fractais são ou não criações artísticas é necessário pensar o que caracteriza uma obra de arte. O caráter artístico de uma obra é dado pela expressividade das formas de linguagem. E aí eu perguntaria: são expressivas as imagens de fractais? Elas expressam experiências humanas? Penso que não. Ainda que suas formas nos proporcionem um grande prazer estético, elas se apresentam em termos neutros, sem conteúdos afetivos. Seria impossível atribuir a essas imagens sentimentos de alegria, tristeza, ironia ou melancolia. Impossível caracterizar essas figuras como trágicas, dramáticas ou líricas. Elas carecem de expressividade e significado por duas razões: falta-lhes tanto um referencial de escala física como, principalmente — pela contínua semelhança formal em todas as magnitudes em que se apresentam —, ritmos e tensões espaciais internas em que se baseia a expressividade das imagens artísticas. Os fractais correspondem, na realidade, a cálculos matemáticos e não a vivências pessoais.

A única forma de se imprimir um conteúdo emocional a tais figuras seria o cien-

tista introduzir nelas as cores, de acordo com os seus sentimentos mais profundos. Isto o levaria a uma maior subjetividade nas imagens, mas o afastaria das equações matemáticas. É evidente que, no caso dos fractais, o cientista não utiliza as cores para expressar certos conteúdos de sua experiência de vida, mas para identificar, visualmente, determinados grupos de números e valores matemáticos.

Isto, no entanto, em nada diminui o prazer estético nem a admiração que podemos sentir diante das imagens que traduzem uma noção revolucionária: a ordem sendo gerada pela 'desordem'. Nos fractais, a desordem ou o 'caos' deixa de ser a negação da ordem para ser concebida como uma espécie de caldo primevo fértil, no qual, em determinadas circunstâncias e determinado momento, as energias se estruturariam coerentemente em ordenações. A ordem seria, então, acaso da desordem. Dá o que pensar.

* ARTISTA PLÁSTICA E PROFESSORA DE TEORIA DA ARTE

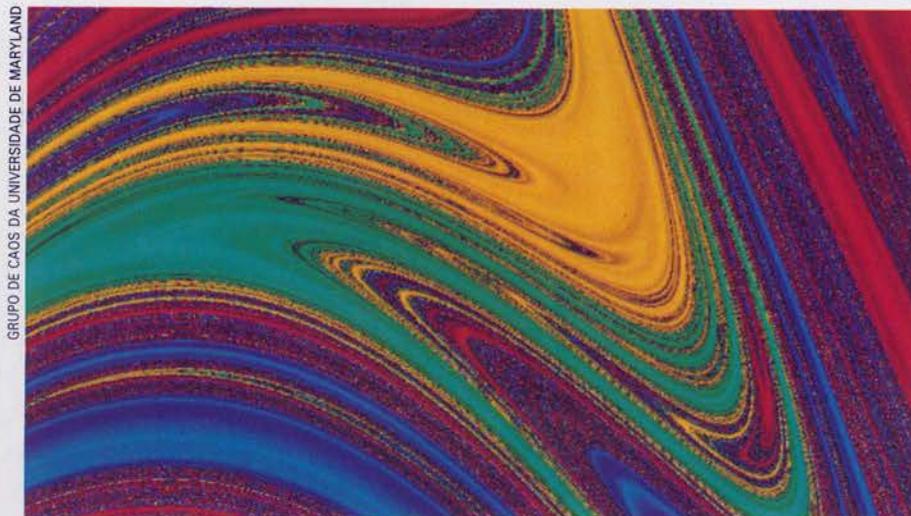
A INCERTEZA RADICAL DA ECONOMIA

Paul Singer*

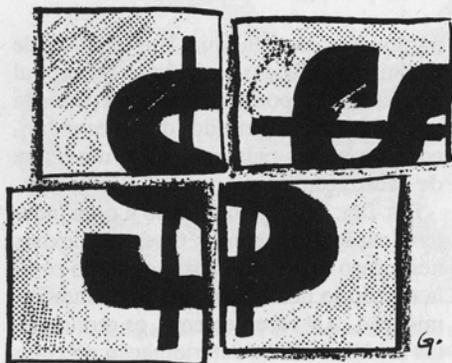
Atualmente, o significado de caos determinístico se refere, de maneira genérica, à propriedade de muitos sistemas determinísticos apresentarem grande sensibilidade a pequenas variações nas condições iniciais. Isto significa que, nesse caso, as incertezas experimentais, sempre presentes em qualquer mensuração física, crescerão muito com o passar do tempo, levando a uma quebra do determinismo absoluto. Seria possível transpor esse conceito para a área de economia?

— Não é muito adequado transpor conceitos de uma ciência a outra. A história da economia contém episódios instrutivos a esse respeito. Teóricos neoclássicos pensaram a economia de mercado como um sistema de forças opostas tendendo espontaneamente ao equilíbrio, semelhante a um modelo da mecânica. Uma transposição desse tipo tem no máximo valor metafórico, mas no fundo tenta dotar a teoria econômica de uma aura de conhecimento exato que se costuma atribuir às ciências naturais.

Se em física o caos é a propriedade de sistemas 'determinísticos' de sofrerem 'uma quebra do determinismo absoluto' com o



GRUPO DE CAOS DA UNIVERSIDADE DE MARYLAND



passar do tempo, é possível traçar uma analogia com a economia capitalista, cuja dinâmica somente pode ser analisada mediante leis probabilísticas, sendo que em certas condições bastante freqüentes a probabilidade do sistema de mover-se numa dada direção é próxima dos 50%, ou seja, a economia se apresenta indeterminada ao observador.

Essa 'qualidade' da economia capitalista já fora descoberta por Marx, que por isso a considerava "anárquica". A economia, embora desmembrada pela divisão social do trabalho e dividida em numerosas empresas autônomas, é essencialmente *una*, pois seus diversos produtos se destinam a satisfazer as necessidades dos seres humanos que a constituem.

Entre necessidade e produção, o único enlace é o mercado, composto por inúmeras empresas competindo entre si. As empresas precisam vender com lucro seus produtos e, para tanto, esses produtos precisam atender, em qualidade e quantidade, os desejos dos compradores. Como empresas não podem coordenar seus planos e sequer intercambiam informações, a probabilidade de que sua atividade conjunta (soma das atividades de todas) satisfaça as necessidades de todas as pessoas inseridas no mercado é pequena. Quando a produção difere da necessária, a unidade da economia se rompe, o que toma a forma de crise de superprodução e/ou de inflação. A solução dessas formas de crise restaura a unidade da economia, geralmente mediante a destruição de forças produtivas e o empobrecimento de parte da sociedade. Enquanto as crises forem superadas é possível descrever a economia capitalista como caos determinístico.

Keynes descobriu o caos na economia ao perceber que o investidor (agente que dispõe de uma parcela do excedente social) se encontrava diante de incerteza radical; embora pudesse formular cenários alternativos sobre a evolução provável da economia, ele não tinha nem poderia ter elemen-

tos para determinar, mediante cálculo probabilístico, qual desses cenários seria o mais provável. A incerteza radical não é um estado psicológico de indivíduos encarregados de tomar decisões, mas uma 'qualidade do sistema': cada cenário depende das expectativas alimentadas pelos demais e estas não se alicerçam em qualquer dado objetivo.

Ao ter que decidir entre investir em bens 'reais' (ampliação da capacidade produtiva), em ativos financeiros ou simplesmente permanecer líquido (guardar o dinheiro), o investidor sabe que acertará se resolver o *mesmo* que a maioria dos outros investidores e, se possível, *antes* que eles. A questão para cada investidor é menos prever o futuro do que prever o que os outros vão prever. Um sistema com essas características é sem sombra de dúvida caótico, sobretudo se se considera que a macrodinâmica da economia, ou seja, se ela vai crescer, estagnar ou decrescer, depende exatamente do destino que os detentores do excedente resolverem lhe dar.

* FACULDADE DE ECONOMIA E ADMINISTRAÇÃO, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

AS PROFECIAS DAS CIÊNCIAS SOCIAIS

Wanderley Guilherme dos Santos*

Grosso modo, *os sistemas denominados caóticos são aqueles que apresentam, sob certas circunstâncias, comportamento não-regular, não-periódico. Seria possível transpor esse tipo de conceito para as ciências sociais?*

— Nas ciências sociais, há fenômenos que apresentam uma regularidade normal. É o caso dos comportamentos eleitorais. Atualmente, as pesquisas eleitorais têm uma margem surpreendente de acerto, praticamente não erram. Já o comportamento de outros fenômenos está mais próximo ao conceito de caos, como o entendido nas

hard sciences. Apresentam uma regularidade diferente, mas que não pode ser dita aleatória. São as chamadas profecias que se autonegam e as que se autocumprem. No primeiro caso, para ilustrar com um exemplo, imaginemos um grupo considerável de pessoas que, para evitar o horário de engarrafamento numa grande cidade, resolvesse sair mais cedo de casa ou do trabalho rumo a um destino único. Esse fenômeno coletivo acaba, portanto, por gerar um engarrafamento que, inicialmente, não era desejado. No segundo caso, podemos imaginar um grande número de clientes que, por um motivo qualquer e também desconhecido, desconfie que seu banco vá falir. Isso leva a uma corrida desenfreada para o saque do dinheiro que, é claro, não está disponível de uma hora para a outra nos cofres. Em princípio, o banco não iria falir, mas a retirada em massa de dinheiro o leva à falência. É um exemplo típico de uma profecia que se autocumpre.

Já mais próximo do conceito grego de caos, do indeterminado, do caos como antecedente de alguma coisa, há nas ciências sociais as denominadas conseqüências não-antecipadas. Por exemplo, o saneamento e a limpeza de terrenos pelo governo ou prefeitura levam à valorização do imóvel. Ou a iluminação de uma determinada região da cidade diminui o número de assaltos. Esses não eram os objetivos iniciais, mas as ações coletivas raramente têm uma só conseqüência. Um outro exemplo típico e mais forte de uma conseqüência não-antecipada é o caso da inflação. Grosso modo, o excesso de moeda em relação aos produtos disponíveis gera inflação. Mas não só isso. Cria também os denominados grupos predatórios, isto é, cartéis que se beneficiam dessa situação inflacionária. Em princípio, para combater a inflação bastaria retirar a causa, ou seja, diminuir o excesso de moeda. Mas os grupos predatórios acabam por



'retroalimentar' ou interagir com a causa — ou causas —, de modo a manter, no caso, a inflação. Atualmente, é muito comum nas ciências sociais o estudo das relações entre as conseqüências não-anticipadas e suas causas.

Os comportamentos de massa seguem curvas semelhantes às da epidemiologia. É possível notar certas características comuns entre determinados tipos de estudos urbanos e a difusão de epidemias. Um exemplo simples seria uma briga em um estádio de futebol lotado. O comportamento do público fica desorganizado, apresenta uma ordem estranha. A briga tende a terminar por si só, mas há um certo limiar, um limite, no qual esse desentendimento atinge proporções alarmantes. É o chamado pânico e não se conhece regras ou mesmo fórmulas que possam explicá-lo.

* INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS SOCIAIS, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, E FACULDADES CÂNDIDO MENDES-IPANEMA

CAOS NA TEORIA ECONÔMICA

Aloisio Pessoa de Araujo*

Como o conceito de caos se aplica à economia matemática?

— Os fenômenos caóticos podem surgir mesmo em modelos que apresentem racionalidade dos agentes econômicos e estão em equilíbrio. Podemos comentar aqui três modelos bem estudados, nos quais é possível falar em caos ou indeterminismo. O primeiro deles é o caos no mercado de ações. Foi o francês Bachelier, professor da Universidade de Paris, que, em 1900, em sua tese *Théorie de la Speculation*, aplicou pela primeira vez a noção de movimento browniano [tipo de movimento desordenado e aleatório de partículas de pequena dimensão

suspensas num fluido] a uma teoria econômica. É preciso ressaltar que a noção de caos aqui não é aquela do caos determinístico, mas a de que os preços das ações no mercado é que se assemelham ao chamado movimento browniano. É interessante ressaltar que Bachelier usou essa noção mesmo antes do trabalho de Einstein (1905). Outra curiosidade a respeito dessa tese é que o famoso matemático francês Henry Poincaré, um dos pioneiros no estudo do caos determinístico, participou de sua banca examinadora. As idéias de Bachelier continham algumas imperfeições matemáticas, o que causou a demora em sua aceitação. Mais recentemente, testes estatísticos tentaram demonstrar uma certa regularidade nesse movimento irregular, como se ele fosse gerado por processos determinísticos, semelhantes aos estudados na física. Mas esses estudos foram inconclusivos. Na década de 1960, a noção de movimento browniano em finanças foi retomada e desde então está presente em muitas aplicações (ver 'O Reconhecimento da Área de Finanças', em *Ciência Hoje*, n.º 68).

O segundo modelo em que se pode comentar uma noção próxima a do caos é a teoria do capital. De modo geral, essa teoria estuda quais as melhores trajetórias do capital para otimizar o bem-estar econômico. O matemático húngaro, naturalizado norte-americano, von Neumann e o inglês Ramsey estudaram aspectos dessa teoria. Esse último criou um modelo de otimização e mostrou que, para o capital chamado ótimo, as trajetórias convergem para um estado estacionário. Contudo, foi demonstrado que os modelos de acumulação do capital podem ser caóticos. Eles acabam por gerar trajetórias aleatórias. Esses modelos são muito precisos do ponto de vista matemático e têm sido alvo de grande interesse dos economistas acadêmicos. Demonstrei recentemente que o caos, embora existente nesses modelos, é limitado pelos próprios

parâmetros da economia, isto é, a taxa de distanciamento das trajetórias do capital que partem de pontos próximos é pequena pela própria natureza dos dados econômicos. Em outras palavras, existe um limite de caotização da economia.

Por fim, o terceiro modelo é o da indeterminação do equilíbrio. O sentido de caos nesse caso está mais próximo, como revela o próprio nome do modelo, da indeterminação. Até recentemente, os economistas acreditavam na determinação do equilíbrio dos preços. Segundo eles, esse equilíbrio só poderia sofrer uma alteração significativa para uma outra situação de equilíbrio — bem diferente da primeira — através de uma mudança brusca na economia, ou seja, por uma mudança tecnológica, choque econômico ou alteração substancial do gosto do consumidor. Atualmente, alguns economistas acreditam que não haja situações 'esparças' de equilíbrio, mas sim uma infinidade de equilíbrios próximos uns dos outros, o que mostraria a indeterminação dos preços na economia de mercado.

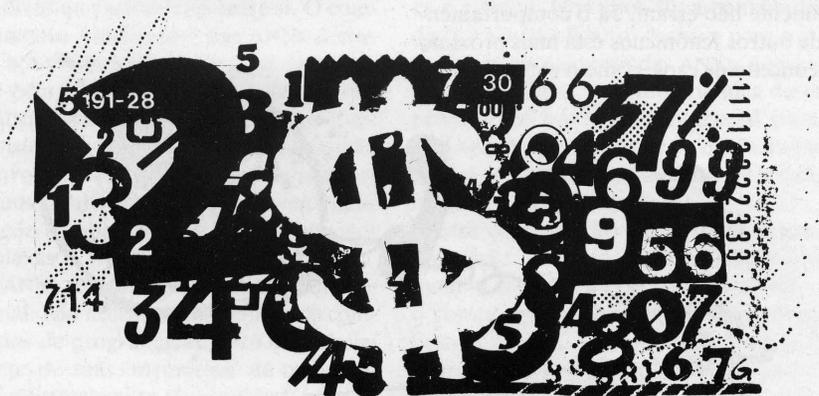
* INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

PERPETUAMENTE REBELDE

José Américo Motta Pessanha*

O que é o caos para a filosofia?

— Os dicionários definem caos como 'confusão geral dos elementos antes de sua separação e da formação do mundo'; em sentido figurado, como 'limite extremo da confusão, desordem irremediável'. A condição de estado anterior à constituição do mundo indica que se trata de conceito fundamentalmente referido à cosmogonia, ao processo de geração ou gênese do universo. É o antes-do-cosmos, a situação primordial da qual o cosmos teria surgido como resultado de ordenação. A contraposição cosmos/caos corresponde, portanto, à oposição ordem/desordem. De fato, a palavra cosmos subentende as conotações de ordem e de beleza. A acepção de beleza ressurgiu, empobrecida, em nossa língua, na palavra cosmético. Mas, para antigos filósofos gregos, como os pitagóricos, o adjetivo *cósmios* tinha significado essencialmente ético e político: tornar-se *cósmios* significava trazer para o plano da vida pessoal e da *pólis* a bela ordenação e a regularidade harmônica reinantes no cosmos. A tranqüila e aparentemente imutável ordenação do plano sideral servia, assim, de modelo para a alma humana e para a organização da sociedade, como aparece em Platão.



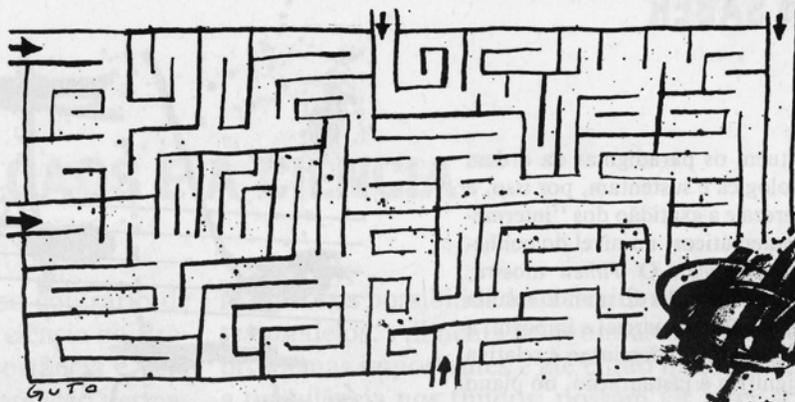
Vale, porém, ressaltar: a ordem, em qualquer nível, para os antigos gregos, não é um dado primeiro, 'natural'. É resultado de conquista e luta, fruto da vitória do agente ordenador sobre os elementos ou forças violentas, desordenadas, caóticas. A teologia mostra isso exemplarmente: apenas subjugando titãs e ciclopes é que Zeus consegue instaurar seu reinado de ordem e hierarquia, indispensável à concepção de um cosmos regular por leis pois dotado de estrutura e comportamento racionais — precondição para o início histórico do empreendimento teórico de filósofos e cientistas.

Todavia, antes do surgimento da filosofia e da ciência teórica (séc. VI a.C.), a idéia de caos, formulada em contexto mitológico, manifesta fecunda ambivalência. Com efeito, o poeta Hesíodo (provavelmente séc. VIII a. C.) apresenta Caos como um dos personagens iniciais e decisivos do drama cosmogônico descrito em sua *Teogonia*. Hesíodo se apresenta como poeta-pastor que, graças à proteção das Musas, filhas de Zeus e Mnemosine (Memória), tem a visão da origem de tudo — do cosmos, dos deuses e dos humanos —, podendo descrever, assim, a genealogia universal que produz todos os seres e ocasiona o estado atual do mundo. Eis o Começo, segundo o poeta:

“Antes de tudo, foi o Abismo (Caos), depois a Terra (Gaia ou Gé) (...) e o Amor (Eros)”. [*Teogonia*, 116-119]

Os três personagens primordiais, ancestrais de tudo, são apontados na primeira cena do drama cosmogônico como fundamentos indispensáveis para o engendramento de qualquer tipo de ser: Terra, “de largos flancos”, é a mãe e nutriz dos seres vivos, que dela dependem para sempre. Eros, o imprescindível mediador, responsável pelas ligações e matrimônios geradores das diferentes espécies que resultam da genealogia cósmica. Primeiro, porém: Caos. Mas, em Hesíodo, Caos não aparece como desordem, confusão ou mistura, antes enquanto abismo, profundidade aberta, vazio. E, de fato, como observa W. Jaeger, em *A Teologia dos primeiros filósofos gregos*, a raiz etimológica de caos ressurgiu nas palavras inglesas *gap* e *gape*, que significam brecha, fenda, abertura, lacuna, intervalo, vácuo, bocejo.

Há, portanto, em caos uma densidade semântica que será explorada por cientistas e filósofos ao longo da história do pensamento ocidental, desde a Antiguidade. De um lado, a aceção de mistura, confusão, desordem. De outro, a aceção espacial, de intervalo ou vácuo. De um lado, a desordenada concomitância de todas as qualida-



des, de todos os pares opostos qualitativos (quente-frio, denso-raro, claro-escuro etc.), que precisam ser relativamente separados para que se instaure o cosmos e seus seres diferenciados. De outro, o onde, o lugar, o espaço; imprescindíveis à configuração das coisas distintas.

Ao que parece, no pensamento arcaico, de expressão mítica ou mitológica, caos manifesta simultaneamente os dois aspectos: o qualitativo e o espacial-quantitativo, dos quais decorrerão posteriormente as cosmogonias e cosmologias científico-filosóficas de teor qualitativista ou geométrico-mecânico-quantitativista. A presença dos dois aspectos parece permanecer nas primeiras concepções científico-filosóficas surgidas na Grécia, a partir do séc. VI a.C. Os dois aspectos ora se alternam, ora se conjugam, com maior ou menor predominância de um sobre o outro. Em Anaximandro de Mileto, por exemplo, o fundamento-origem (*physis*) de todas as coisas é identificado ao *ápeiron* (ilimitado, infinito). A escolha desse princípio fundamentador expresso pela negação (da limitação, da finitude) parece decorrer da exigência lógica de se encontrar uma *physis* que, para ser a matriz de tudo, sustentasse a existência das qualidades opostas. Para tanto, não poderia ter nenhuma das qualidades dos seres que dela resultam e nela se sustentam. Ou tê-las todas, numa fusão que confere ao todo do *ápeiron* sua neutralidade, sua indefinição qualitativa. A indeterminação seria, desse modo, sinônimo de (con)fusão. Mas a mesma palavra *ápeiron* carrega o sentido de infinito, de sem limites, em aceção espacial — o que permite repensar a interpretação exclusivamente qualitativista do pensamento de Anaximandro e vinculá-lo também à linhagem matematizante que vai da aritmo-geometria do pitagorismo arcaico às aporias ou argumentos de Zenão de Eléia sobre a grandeza, o espaço e o movimento, que motivarão, em tentativa de respostas, a concepção atomista de vazio (Leucipo, Demócrito) e a física de Platão.

De qualquer modo, é possível que, no *ápeiron* de Anaximandro, os aspectos qualitativo e quantitativo estejam mesclados,

sem o tipo de separação ou oposição estabelecidas pela física posterior — em nome da qual se fazem, freqüentemente, leituras anacronicamente modernas do pensamento antigo. Nessa mesma direção interpretativa, vale lembrar que o pensador que se segue a Anaximandro na tradição miletiana torna mais nítida a intrínseca relação entre o qualitativo e o espacial. De fato, Anaxímenes de Mileto retorna à concepção de *physis* enquanto qualitativamente determinada — Tales, o primeiro da chamada escola de Mileto, dissera que a origem de tudo era a água —, afirmando que todas as coisas provêm do ar infinito (*pneuma ápeiron*), por meio de duplo e complementar processo de rarefação e condensação. Em Anaxímenes, portanto, o qualitativo (*pneuma*) conjuga-se ao quantitativo (*ápeiron*, enquanto infinito), como condições indispensáveis à constituição dos cosmos (conjunto ordenado e heterogêneo de seres). Pode-se, desse modo, ver na solução proposta por Anaxímenes não a mera tentativa de conciliação entre teses ou tendências, mas a retomada e a explicitação, em nível filosófico, da dupla aceção que estaria contida na noção arcaica de caos.

A presença subjacente e as transmutações da idéia de caos nas cosmogonias filosóficas ajudam, indiscutivelmente, a elucidar essas concepções que dialogam permanentemente — de forma explícita ou tácita — com o pensamento mitopoético. Assim é que não se pode perder de vista a aceção de caos enquanto mistura e (con)fusão qualitativa ao se analisar os conceitos de potência — no sentido de potencialidade, virtualidade — e de matéria em Aristóteles. Da mesma maneira, não se pode aprender adequadamente — e em perspectiva grega, não moderna — o significado de “causa errante” em Platão (*Timeu*), sem vinculá-la à aceção espacial de caos sugerida por Hesíodo. Com efeito, Platão descreve a construção do cosmos em analogia à feitura de uma obra de arte. O artesão — demiurgo — procura, para efetivar seu trabalho, persuadir a “causa errante” a ordenar-se segundo o modelo oferecido pelas essências eternas e perfeitas, as “idéias” ou formas

que constituem os paradigmas da ordem lógico-ontológica e sustentam, por isso, a própria clareza e a exatidão dos “intermediários” matemáticos, no nível do conhecimento (*República*). O *Timeu* mostra, pois, que a constituição do mundo resulta de uma razoabilidade parcial e imposta: a persuasão obtida pelo demiurgo é relativa e jamais significa a instauração, no plano da corporeidade do mundo, da organização racionalmente perfeita das essências incorpóreas. O cosmos surge, assim, na condição de intermediário — fruto de persuasão e acordo que se impõem à perene resistência da causa errante — entre a Ordem Plena e a Erraticidade Pura. É um *misto* feito de ordem (parcial e relativa) e desordem (parcial e relativa). Mais: ao descrever esse domínio de erraticidade pura, pré-cósmica — de forma inevitavelmente analógica, pois se trata de “fase” anterior à ordenação das coisas e da linguagem —, Platão desvela um panorama de figuras erráticas e movimentos desconexos. Sob a influência do matematismo de fundo pitagórico que em seu tempo explorava sobretudo a questão dos números “irracionais”, o filósofo mostra triângulos pertencentes a uma geometria selvagem, ainda indomada pelo *logos* (razão), e um mecanicismo que ainda desconhece a ordenação que lhe imporá regularidades, conexões, leis: magma ordinário, desordem natural, o titanismo de um caos perpetuamente rebelde.

* INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS SOCIAIS, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS (RIO DE JANEIRO)

O CAOS SONORO

Livio Tragtenberg*

Qual a relação do caos com a música?

— Ao longo do tempo, a música ocidental, de modo geral, caminhou de forma a estabelecer padrões e parâmetros cada vez mais estáveis e uniformes para o fenômeno musical, no sentido de elaborar um sistema globalizante.

Esse movimento atuou na uniformização da escala de frequências — o que levou ao sistema temperado que divide a oitava em 12 sons que guardam praticamente a mesma distância entre si —, num sistema de durações baseado em números proporcionais (um meio, um quarto etc.) e ainda num elenco de formações instrumentais (orquestras, quarteto de cordas etc.) e de formas musicais.

Essa uniformização se estendeu para além da Europa e hoje é praticada como pa-

drão nas mais diferentes culturas. Portanto, pode-se dizer que a música ocidental nos últimos 500 anos se desenvolveu a partir de um complexo movimento de assimilações e de depurações de seus elementos em padrões gerais normativos, cujo resultado mais acabado é, sem dúvida, a tonalidade, isto é, suas regras de harmonia (verticalidade) e contraponto (horizontalidade).

No entanto, deve-se abordar esse processo de desenvolvimento da linguagem a partir de dois pólos, ou seja, o material sonoro e a manipulação do compositor, que, ao contrário de serem excludentes, são complementares e interativos.

Coloca-se da mesma forma a questão do caos e a música. Sua incorrência difere de natureza nesses dois pólos da ação musical. Uma coisa é a *turbulência* na constituição do som; outra, a aplicação de procedimentos não-lineares na elaboração do discurso sonoro.

Já foi dito que a música ocidental caminhou no sentido da uniformização e do estabelecimento de um repertório controlado *a priori* da criação propriamente dita. Pode-se, assim, listar certos procedimentos constantes nas obras de diferentes compositores, de forma que se obtenham algumas seqüências de esquemas e situações composicionais gerais. Em suma: resumir os dados e estabelecer uma manipulação combinatória.

De forma simplificada, a idéia de caos resume a seguinte situação: pequenas causas, grandes efeitos. Essa desproporção aparente entre fenômenos e grandezas gera situações atípicas para os padrões médios dos sistemas em que esses fenômenos se incluem.

A criação musical, de forma análoga, é um campo fértil para o surgimento desse tipo de fenômeno. Nela a ocorrência do acaso é de natureza próxima ao que se poderia chamar fenômeno caótico: ambos emergem da manipulação de um repertório amplo de possibilidades, redirecionando e mesmo requalificando os temas formantes e suas funções no sistema. Para o compo-

sitor, a regra é o ponto de partida, desde que ele adote um sistema em que a existência desse tipo de formante faça sentido morfológico, não de chegada. Recorro ao exemplo do “salto no escuro” do último Beethoven.

Nos dias de hoje, o criador incorpora, ao seu arsenal de estratégias de linguagem, materiais e procedimentos de diferentes naturezas. Noutra ocasião, para exemplificar essa espécie de movimento não-periódico na manipulação dos dados composicionais, utilizei a representação visual do *atrator de Lorenz* (ver *Artigos Musicais*, col. Debates, Ed. Perspectiva, 1991).

A partir dos equipamentos eletrônicos, é possível interferir na natureza acústica básica do som, a ponto de simular nela procedimentos não-lineares e aleatórios que perturbem desde a formação da própria frequência até o timbre. A propósito, o que comumente chamamos *ruído* — e que foi repellido como som não-musical na música ocidental até este século — é um fenômeno sonoro em cuja formação acústica seus formantes encontram-se combinados de forma irregular, incorporando equações complexas que não são redutíveis a um ou mais padrões predominantes.

Por definição, a atuação criativa inventiva carrega em sua essência a idéia de desestabilização, de re colocação dos elementos em novas ordens. A própria invenção sonora sofre uma “dependência sensível às condições iniciais”. Na música de hoje, é uma conquista o fato de o compositor, na formação de sua idéia musical, elaborar e operar, ao mesmo tempo e de forma indivisível, a realidade fenomenológica do som e seu uso composicional. Para ele, mais do que nunca, “o mundo é a totalidade dos fatos e não das coisas” (Wittgenstein).

* COMPOSITOR. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS E UNIVERSIDADE LIVRE DE MÚSICA DE SÃO PAULO.

Colaboraram Vera Rita Costa e Carmen Weingrill *Ciência Hoje*/São Paulo, Alicia Ivanissevich e Cássio Leite Vieira *Ciência Hoje*/Rio de Janeiro.



ILUSTRAÇÕES GUTO LINS



SISTEMAS HAMILTONIANOS: CAOS E QUANTIZAÇÃO, de Alfredo M. Ozorio de Almeida, Editora da Unicamp, Campinas, 1987, 312 pp. Tradução para o inglês: **HAMILTONIAN SYSTEMS: CHAOS AND QUANTIZATION**, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1988, 238 pp.

Várias revistas internacionais avaliaram o livro de Alfredo M. Ozorio de Almeida, publicado em inglês pela Cambridge University Press (CUP). Pude encontrar resenhas — por sinal, todas muito elogiosas — em, pelo menos, quatro idiomas, isto é, inglês, francês, alemão e romeno. Tento aqui preencher a falta de uma delas em nossa própria língua.

Ozorio de Almeida iniciou sua graduação em física na PUC-RJ, concluída, em 1970, na Universidade de Bristol, onde também obteve seu doutorado, em 1973. Desde 1974, é professor no Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), onde já formou diversos mestres e doutores.

O autor ainda se considera de certa forma ligado a Bristol por ter colaborado com Michael Berry, de quem foi aluno, Michael Tabor e John Hannay. Mas é também necessário dizer que isso não faz justiça ao fato de ele ser bastante conhecido na comunidade internacional de física matemática. Por exemplo, pelo número de trabalhos e lugares onde proferiu palestras, Ozorio de Almeida já deu quase uma volta ao mundo.

Sua área de trabalho, a interface entre a mecânica clássica e a mecânica quântica, é um dos temas da física matemática que mais tem despertado interesse nos últimos anos, particularmente com a influência das idéias geométricas e topológicas dos sistemas dinâmicos. Segundo o autor, seu objetivo é “apresentar um caminho dentro do vasto território dos sistemas dinâmicos (...). A trilha tomada teve sempre em

ELOGIOS AO 'CAOS' BRASILEIRO

vista o estudo do limite semiclássico da mecânica quântica.” Pergunto: foi alcançado esse objetivo? Pelo que mostram alguns dos comentários, parece que sim.

Edward Ott, do Laboratório de Pesquisa em Plasma da Universidade de Maryland (EUA) e também um dos editores da *Physical Review Letters*, escreveu na *Science* (vol. 245, 1990) que “o livro apresenta a mecânica hamiltoniana sob um ponto de vista moderno e trata de implicações do caos para a mecânica quântica. Como poderia se esperar, o tratamento do autor para esse fascinante tópico é de muito bom nível, dadas as suas contribuições para o tema.”

Richard Churchill, da Universidade da Cidade de Nova York, opinou sobre o livro na *Math. Review* (1990). Para ele, “um leitor pode ter uma visão muito boa desse campo a partir desse pequeno texto (...) que não pretende ser rigoroso, mas realmente apresenta provas quando elas são necessárias”.

A *Physics in Canada* (1990) traz a avaliação de John R. de Bruyn, do Departamento de Física da Universidade Memorial (Canadá). “Ozorio de Almeida cobre seu assunto de modo lúcido e conciso (...) o livro é escrito em um estilo ilusoriamente fácil (...). Idéias importantes são ilustradas com exemplos.”

O livro de Ozorio de Almeida também foi assunto na *La Recherche* (1990). “Essa obra será um excelente instrumento de trabalho para os estudantes e pesquisadores, o número de exercícios propostos permite o gradual desenvolvimento do assunto”, relata a revista francesa de divulgação científica.

J. T. Stuart, da Universidade Brown (EUA), avalia na *SIAM Review* (1990) que o “livro surgiu a partir de palestras dadas em português pelo autor na Universidade Estadual de Campinas em 1985. A versão para o inglês parece-me uma tradução muito boa e já traz revisões em relação ao texto original. O livro de Ozorio de Almeida é recomendado como uma ótima introdução ao assunto, tanto para estudantes de pós-graduação quanto para pesquisadores, jovens ou maduros.”

Depois dessas avaliações, caberia ainda fazer uma breve descrição dos assuntos tratados. Na primeira parte (dinâmica clássica), o autor consegue a façanha de, em pouco menos de 200 páginas (na versão em português), apresentar de maneira muito clara uma grande variedade de tópicos, tais como sistemas lineares *versus* não-lineares,

estabilidade estrutural, o mapeamento ‘feradura’ de Smale, sistemas ergódicos, expoentes de Liapunov, método de Melnikov, formas normais, pequenos denominadores, sistemas hamiltonianos integráveis, cáusticas, teoria de Kolmogorov-Arnold-Moser, cantores, invariantes adiabáticos.

Na segunda parte (dinâmica quântica), ao todo três capítulos, Ozorio de Almeida consegue façanha ainda maior. Apresenta, em menos de cem páginas, as principais idéias de alguns tópicos escolhidos na literatura recente. No capítulo sete, partindo da tradicional quantização semiclássica dos toros invariantes (Bohr, Einstein, Sommerfeld), as correções topológicas de Keller e Maslov são explicadas pelo método da fase estacionária. Também são apresentados o propagador e as extensões para a função de Wigner.

Em outro extremo, o capítulo oito se dedica à quantização de sistemas classicamente ergódicos. Destaca-se aí a relação entre as flutuações do espectro de energia e importantes resultados matemáticos da análise de matrizes aleatórias e, surpreendentemente, da teoria dos números. Finalmente, o capítulo nove demonstra a importância das trajetórias periódicas clássicas para a mecânica quântica.

Dada a concisão e clareza do livro, unanimemente apontadas em todas as resenhas que encontrei, tomo a liberdade de fazer uma sugestão para a próxima edição. Por que não estender a segunda parte do livro em, digamos, mais cem páginas? Esteticamente, ele ficaria mais bem balanceado com a inclusão de três capítulos nessa parte. Um deles poderia se dedicar a um sumário das outras técnicas de quantização existentes. Outro, a um *survey* sobre a literatura recente em caos quântico.

Finalmente, um capítulo final sobre as próprias contribuições do autor, complementado, talvez, por uma perspectiva pessoal sobre as possíveis direções para a pesquisa nesse campo. Pelas suas qualidades, o livro de Alfredo M. Ozorio de Almeida já é importante e, com certeza, vai se tornar um clássico do assunto.

JAIR KOILLER

LABORATÓRIO NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA, CNPq E INSTITUTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

ALGUNS CONCEITOS SOBRE SISTEMAS DINÂMICOS

Sistema dinâmico: qualquer sistema em que as grandezas (variáveis dependentes) que o descrevem evoluem no tempo. Matematicamente, o sistema dinâmico é constituído pelo espaço de estados possíveis para o sistema (**espaço de fase**) e por suas regras de evolução. Estas podem ser **equações diferenciais**, no caso em que as variáveis são contínuas (representadas por números reais), ou **mapeamentos**, quando alguma delas é discreta (representada por números inteiros). Exemplos:

- a) Movimento de uma partícula sob a ação de uma força
Regra de evolução: $mdv/dt = F$ [segunda lei de Newton]
Variáveis dependentes: posição x e velocidade v .
- b) Sistema com tempo discreto
Regra de evolução: $x_{i+1} = ax_i(1-x_i)$ [mapeamento logístico]
Variável dependente: x

Espaço de fase: espaço constituído pelas variáveis que descrevem completamente o sistema. Cada ponto do espaço de fase representa um estado possível para o sistema e por ele passa só uma trajetória. Um pequeno volume nesse espaço representa sistemas com condições iniciais próximas. Em mecânica, o espaço de fase é constituído pelas coordenadas de posição das partículas e pelas componentes das velocidades — ou, mais geralmente, dos *momenta* (figura 1).

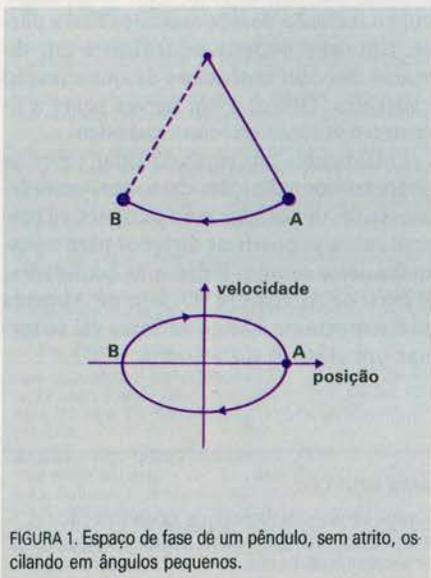


FIGURA 1. Espaço de fase de um pêndulo, sem atrito, oscilando em ângulos pequenos.

Sistema integrável: sistema dinâmico com comportamento regular. Suas trajetórias no espaço de fase podem ser representadas sobre a superfície de um toro n -dimensional (figura 2).

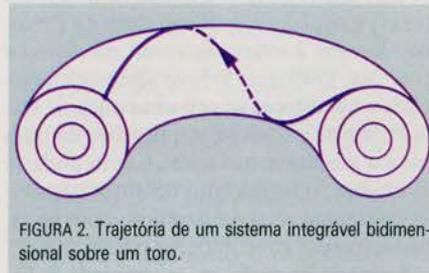


FIGURA 2. Trajetória de um sistema integrável bidimensional sobre um toro.

Sistema caótico (não-integrável): sistema dinâmico que apresenta grande sensibilidade às condições iniciais. Suas trajetórias têm, em geral, comportamento muito complicado e não estão dispostas sobre toros regulares. O ‘mecanismo’ do caos se expressa por um processo repetitivo que estica um determinado volume do espaço de fase — o que produz um afastamento das trajetórias vizinhas —, seguido por dobramentos desse mesmo volume. Para existir caos, o espaço de fase de um sistema contínuo deve ter, pelo menos, três dimensões. Um sistema não-integrável pode apresentar, no entanto, regiões nas quais as trajetórias se comportam regularmente.

Expoente de Liapunov: a sensibilidade às condições iniciais é quantificada usualmente pelos expoentes de Liapunov, que medem a taxa de separação entre trajetórias vizinhas ao longo do tempo (figura 3).

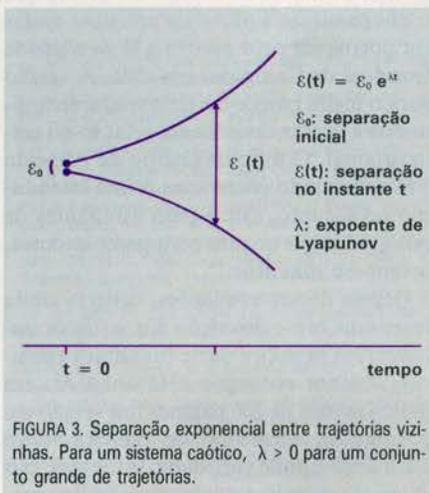


FIGURA 3. Separação exponencial entre trajetórias vizinhas. Para um sistema caótico, $\lambda > 0$ para um conjunto grande de trajetórias.

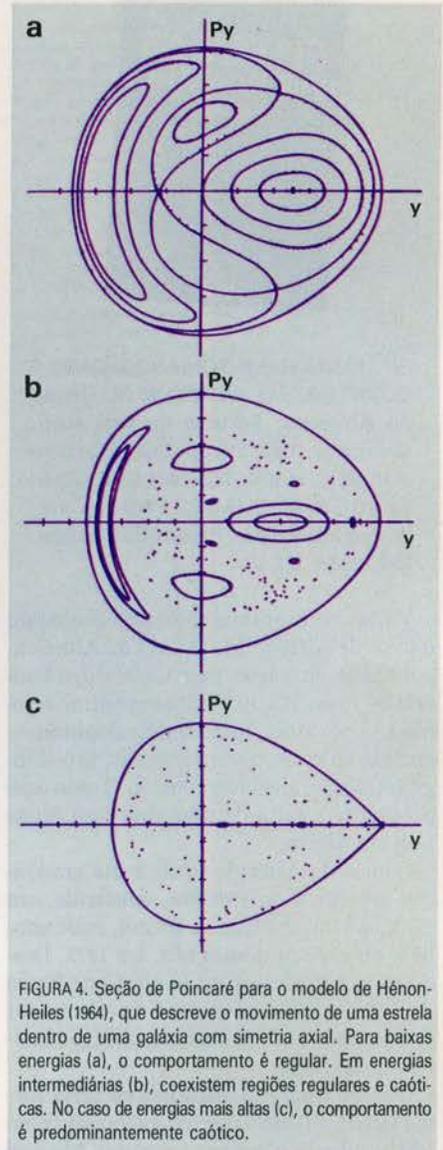


FIGURA 4. Seção de Poincaré para o modelo de Hénon-Heiles (1964), que descreve o movimento de uma estrela dentro de uma galáxia com simetria axial. Para baixas energias (a), o comportamento é regular. Em energias intermediárias (b), coexistem regiões regulares e caóticas. No caso de energias mais altas (c), o comportamento é predominantemente caótico.

Seção de Poincaré: para visualizar o comportamento das trajetórias num espaço de fase de muitas dimensões, Poincaré imaginou interceptá-las por uma superfície — em geral, um plano —, chamada seção de Poincaré e estudar a figura formada pelos pontos em que a superfície é perfurada pelas trajetórias. As seções de Poincaré de sistemas caóticos apresentam regiões onde os pontos se distribuem de maneira complicada, não formando curvas contínuas fechadas. Já as seções de Poincaré de sistemas integráveis contêm pontos (trajetórias periódicas) ou curvas contínuas fechadas, representando trajetórias quase-periódicas (figura 4).

Sistemas conservativos: são sistemas que genericamente conservam a energia. O volume no espaço de fase desses sistemas fica constante no tempo (figura 5).

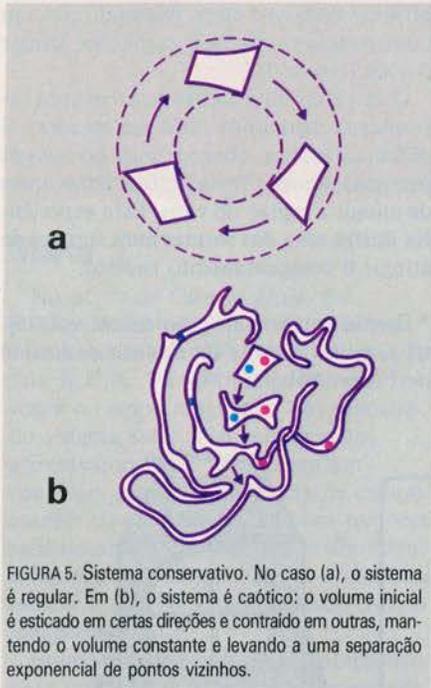


FIGURA 5. Sistema conservativo. No caso (a), o sistema é regular. Em (b), o sistema é caótico: o volume inicial é esticado em certas direções e contraído em outras, mantendo o volume constante e levando a uma separação exponencial de pontos vizinhos.

Sistemas dissipativos: são sistemas nos quais a energia não se conserva. O volume no espaço de fase se contrai ao longo do tempo (figura 6). Tanto sistemas conservativos quanto dissipativos podem apresentar ou não comportamento caótico.

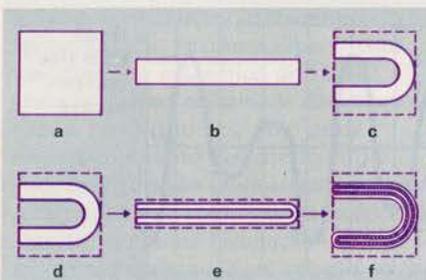


FIGURA 6. A ferradura de Smale é um exemplo de sistema dissipativo. O quadrado inicial (a) é esticado até o dobro de seu tamanho, compactado em um retângulo de área reduzida (b) e dobrado em forma de ferradura (c). O processo se repete em (d), (e) e (f).

Atrator: região (subconjunto) do espaço de fase de sistemas dissipativos para a qual tendem as trajetórias que partem de determinada região (figura 7). O atrator é dito **estranho** se tiver dimensão fracionária (figura 8).

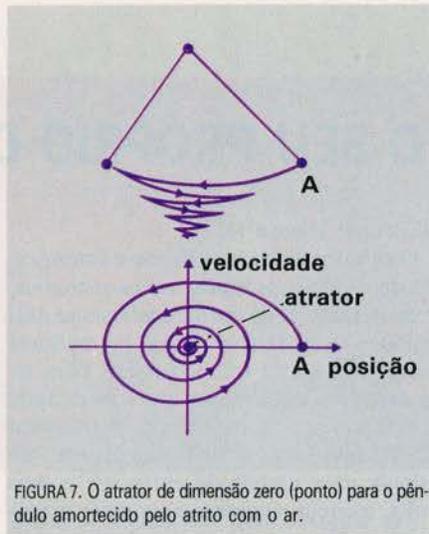


FIGURA 7. O atrator de dimensão zero (ponto) para o pêndulo amortecido pelo atrito com o ar.

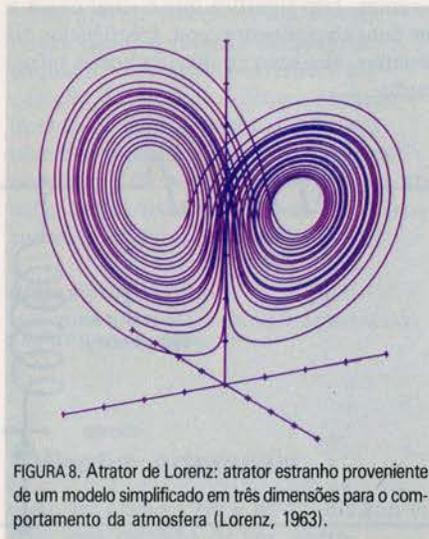


FIGURA 8. Atrator de Lorenz: atrator estranho proveniente de um modelo simplificado em três dimensões para o comportamento da atmosfera (Lorenz, 1963).

Fractal: termo introduzido por Benoit Mandelbrot para designar objetos e estruturas 'fracionadas', com a propriedade de auto-similaridade (a figura tem a mesma forma em cada escala, ou seja, se uma parte dela for ampliada terá a mesma forma da figura inteira). Muitos objetos naturais podem ser modelados aproximadamente por fractais, tais como linhas costeiras, rochas porosas, nuvens, folhas e plantas muito ramificadas etc. A **dimensão fractal** desses objetos é fracionária.

Dimensão fractal: a definição mais simples de dimensão é a capacidade, também chamada **dimensão fractal**, e é dada por

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log (1/\epsilon)},$$

onde ϵ é o comprimento da unidade de medida e $N(\epsilon)$, o número de elementos unitários de volume necessários para cobrir o objeto analisado. A idéia é a seguinte: cubra o objeto com cubinhos de lado ϵ e conte

quantos gastou. Repita a operação para ϵ cada vez menor. Quando ϵ tende para zero, a definição anterior fornece a dimensão fractal do objeto (figuras 9 e 10).

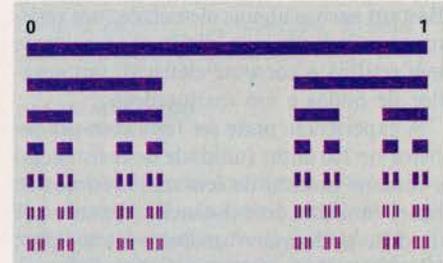


FIGURA 9. O conjunto de Cantor, chamado também 'poeira de Cantor', é construído dividindo-se o intervalo unitário em três partes. Remove-se, em seguida, a parte central e se repete o processo indefinidamente para cada segmento remanescente. Sua dimensão fractal é $d = \log 2 / \log 3 = 0,63...$



FIGURA 10. Primeiros estágios da construção da curva de Koch (periferia da figura). Sua dimensão fractal é $d = \log 4 / \log 3 = 1,26...$

Catástrofe: aparecimento súbito de uma solução qualitativamente diferente para as equações de um sistema quando um parâmetro é variado suavemente (figuras 11 e 12).

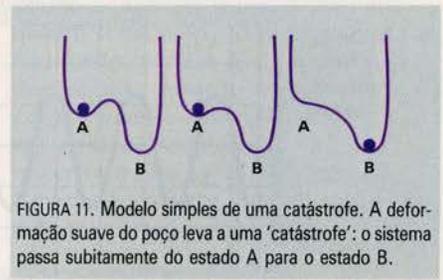


FIGURA 11. Modelo simples de uma catástrofe. A deformação suave do poço leva a uma 'catástrofe': o sistema passa subitamente do estado A para o estado B.

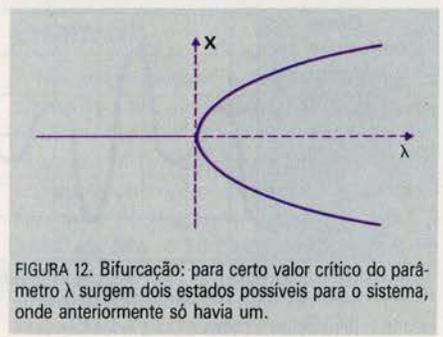


FIGURA 12. Bifurcação: para certo valor crítico do parâmetro λ surgem dois estados possíveis para o sistema, onde anteriormente só havia um.

FAÇA O SEU PRÓPRIO CAOS

Com um simples circuito, um cientista amador pode produzir e observar o caos. Bastam apenas alguns elementos: um resistor, um indutor, um diodo (componente que retifica a corrente elétrica), um gerador de ondas e um osciloscópio.

A experiência pode ser feita com um resistor de 200 ohms (unidade de resistência) e com um indutor de cem milionésimos de henry (unidade de indutância). Quanto aos diodos, podem ser usados vários tipos: IN4001, IN4004, IN4005 e IN4007. Os componentes devem ser conectados em série seguindo a ordem — gerador de ondas/resistor/indutor/diodo. A alimentação e a saída do circuito são monitoradas pelo os-

ciloscópio (figura 1).

O gerador de ondas é ligado e sintonizado de modo a produzir ondas senoidais, com frequência de aproximadamente dois milhões de hertz (ciclos/seg) e amplitude entre +0,1 e -0,1 volt. O sinal da saída terá uma amplitude menor que o da entrada mas com a mesma frequência. Aumentando gradualmente o sinal de entrada, até atingir uma amplitude entre um e dois volts, o circuito começa a produzir um sinal na saída, com dois picos de alturas diferentes. Isto significa que o sinal passa a ter duas componentes com frequências diferentes, situação conhecida como bifurcação.

Continuando a aumentar a amplitude em pequenas quantidades, o sinal começará a bifurcar cada vez mais, passando por um número infinito de bifurcações até atingir o caos (figura 2).

Como estas bifurcações ocorrem para variações de amplitude cada vez menores, é difícil, na prática, observar mais do que um pequeno número dessas bifurcações antes de atingir a região do caos. Esta experiência ilustra uma das formas mais simples de atingir o comportamento caótico.

* Baseado na *Scientific American*, vol. 266, nº 1, p. 121, 1992, e na *Revista de Ensino de Física*, vol. 11, 1989.

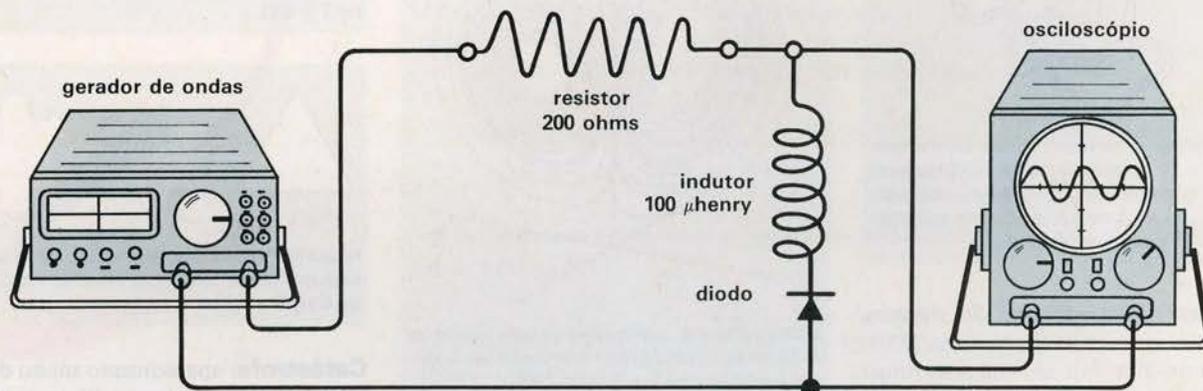


FIGURA 1. Esquema do circuito para produzir o caos.

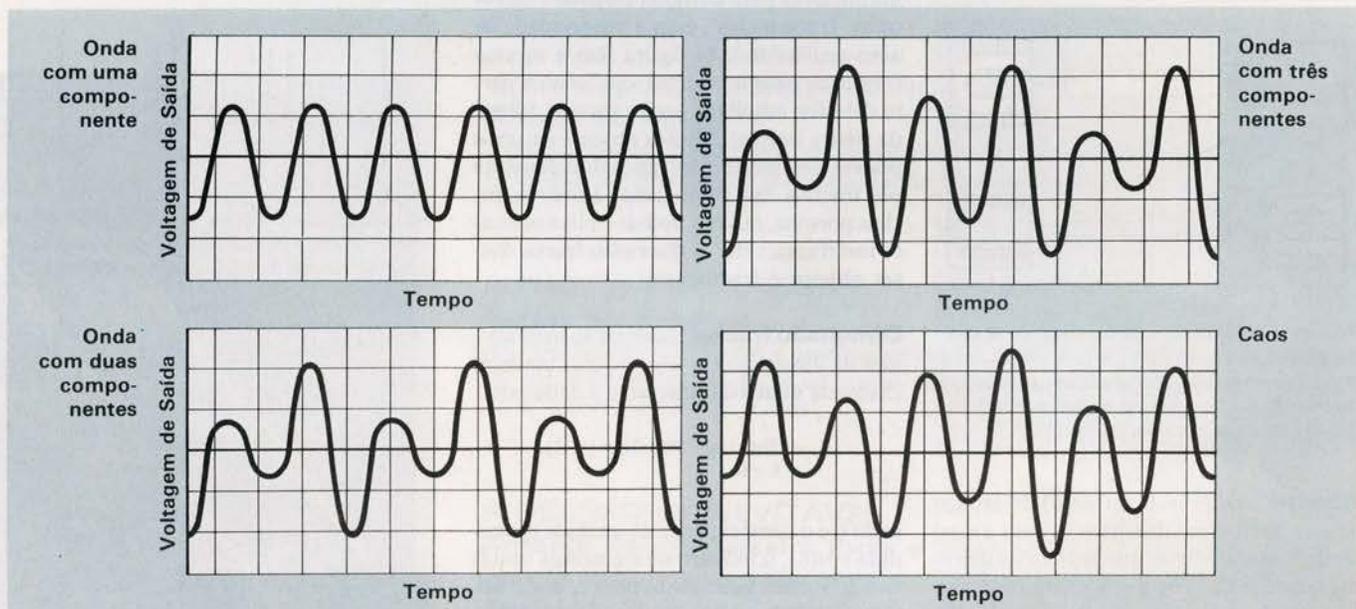
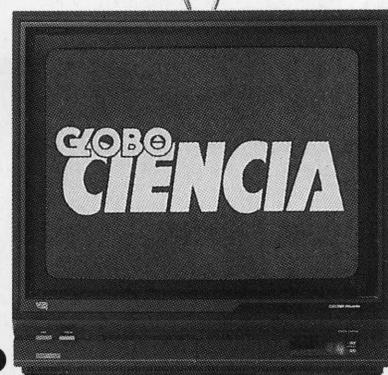


FIGURA 2. Bifurcações e caos.

SE VOCÊ TEM ALGUMA COISA A DIZER SOBRE CIÊNCIA APROVEITE QUE ELA ESTÁ NO AR.



A Fundação Roberto Marinho convida a todos os professores e cientistas a participarem do Programa Globo Ciência, com idéias, experiências, relatos e descobertas. Entre em contato conosco e não perca, todos os domingos, 7:30h, na Globo, uma verdadeira revista de ciências na televisão.

COORDENAÇÃO DE PROGRAMAS - FUNDAÇÃO ROBERTO MARINHO -
Av. Paulo de Frontin, 568 - Rio Comprido - Rio de Janeiro - CEP 20260 -
Caixa Postal nº 996 - CEP: 20010 - tel.: 273-2490 - fax: 293-8912

FBB
FUNDAÇÃO
BANCO DO BRASIL

RM
FUNDAÇÃO
ROBERTO MARINHO

A única revista
de divulgação científica para crianças

CIÊNCIA HOJE

das crianças



jogos,
experiências,
ciência,
brincadeiras,
bichos,
contos

UMA PUBLICAÇÃO

